物理学30講シリーズ 戸田盛和著 3

波動と非線形問題30講

朝倉書店

物理学30講シリーズ3　戸田盛和著

波動と非線形問題30講

朝倉書店

はしがき

この30講シリーズの第3巻では非線形問題，主に非線形波動を扱った．20世紀の後半にもっとも著しい発達を遂げた数理物理学の分野の1つが非線形問題であることは多くの人の認めるところである．

以前には，たとえばやや複雑な振動を理解しようとする場合，これをより単純な振動の重ね合わせとみる立場，すなわち線形の要素に分解して考察するのが主流であった．しかし振動が振動を助長し大きな振動へと発展する発振の現象は明らかに非線形であるが，発振現象がなかったらテレビ，ラジオ，電話などの電波もつくり出すことはできない．世の中の重要な事柄，興味ある現象のほとんどすべてが非線形であるといってよいほど非線形の世界は広く深い．フィードバック，集団運動，生態系，複合汚染，破壊，爆発，カオス，カタストロフィー，などと限りなく多くのものが非線形性に関係している．

このように非線形の世界は豊かであるが，人間が線形的思考を超える能力を身につけ出したのはこの30年来のことである．これにはコンピュータの絶大な計算能力が大きな貢献をした．コンピュータは思いがけなかったような非線形の世界の概念や法則の存在を知らせてくれたのである．

この新しい世界に向けて数理的な解析の努力が集中し，1967年にはKdV方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式を解く解析的方法が見出され，その解はソリトンという集団運動の概念を確立することになった．これをきっかけにして毎月のように新しい発見が相次いだので，今では解きうる非線形方程式の数はほとんど数限りなく多くなってきている．

本書ではまず初めの5講で発振，生態系，カオスなど非線形の特徴的な現象から入り，続く20講では非線形波動のもっとも典型的なものとしてKdV方程式と戸田格子，さらにこれらを拡張した2次元の体系を扱って，非線形発展方程式の基本的事項と思われるものをできるだけ明白に提示した．広く深くなった非線

形の数理には種々の見方，多数の面があり，しかも絶えず進歩しているので，ここに収めた部分はほんの一部にすぎないが，この方面の入門書として役立つようにと思って項目を選んだ．最後には剛体の回転という自由度がやや大きい非線形の問題を扱い，この方面で有名だが詳しく知られていないコワレフスカヤのコマの運動について述べた．これも本書の特徴の1つである．

本書を書くに当たって，著者は多くのセミナーや研究会，あるいは多くの友人から学んだ事柄を改めて勉強し直した．「学んで時にこれを習う．また楽しからずや」(『論語』) といいたいところであるが，またいくらか骨の折れる仕事でもあった．この機会にいろいろと教えられた友人たちに深く感謝したい．

本書はあまり専門的にならないようにしたが，さらに著者の理解がとどく範囲が限られているためもあって不十分あるいは不正確なところがあるのではないかと恐れる．著者が最近読んで参考にしたテキスト

広田良吾著『直接法によるソリトンの数理』岩波書店，1992.

大貫義郎・吉田春夫著『力学』岩波講座 現代の物理学 1，岩波書店，1994.

などがこのような点を補ってくれるかもしれない．

本書を手にした読者が非線形の世界に対する興味をもつきっかけになれば幸いである．

終わりに本書の出版に際していろいろお世話になった朝倉書店の方々に厚くお礼を申し上げたい．

1995年2月

著　　者

目　　次

第 1 講　自 励 振 動……1

Tea Time: 発振現象　*6*

第 2 講　ロジスティック方程式……8

Tea Time: 人口爆発　*12*

第 3 講　ロトカ-ヴォルテラの方程式……13

Tea Time: 生態系　*19*

第 4 講　ローレンツ系のカオス…… 21

Tea Time: ベナールの渦　*26*

第 5 講　1次元写像のカオス…… 28

Tea Time: 不連続時間　*34*

第 6 講　簡単な波動方程式…… 36

Tea Time: レイリー卿　*41*

第 7 講　コルテヴェーグ-ド・フリース方程式……43

Tea Time: ソリトンの発見　*49*

第 8 講　ラックス形式…… 51

Tea Time: マーチン・クルスカル　*55*

第 9 講　逆 散 乱 法…… 57

Tea Time: 逆散乱法とは　*64*

第10講　双 対 格 子…… 65

Tea Time: ルビンの壺　*71*

第 11 講　非線形格子波動…… 73
Tea Time: 戸田格子の発見 *77*
第 12 講　格子の 2 ソリトン解…… 79
Tea Time: ソリトンと非線形波動方程式 *83*
第 13 講　格子のラックス形式と保存量…… 85
Tea Time: 保存量 *91*
第 14 講　格子に対するゲルファントーレビタンの方程式…… 93
Tea Time: 方程式と直観 *99*
第 15 講　格子の N ソリトン解……101
Tea Time: カチカチボール *107*
第 16 講　連続体近似……109
Tea Time: 再帰現象 *114*
第 17 講　いくつかの非線形方程式……116
Tea Time: 自己集束 *121*
第 18 講　ラックス形式の拡張……122
Tea Time: 虚数を含む方程式 *126*
第 19 講　ベックルント変換……128
Tea Time: カッツーメールベッケ系 *135*
第 20 講　広田の直接法……137
Tea Time: 和算 *143*

第 21 講　2 次元 KdV 方程式 (KP 方程式)……145
Tea Time: 2 次元 KdV 方程式 *149*
第 22 講　KP 方程式の N ソリトン解……150
Tea Time: 箱と球の系 *157*
第 23 講　2 次元戸田格子……159
Tea Time: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ と $\frac{\partial^2}{\partial x \partial s}$ *165*
第 24 講　可積分系と非可積分系……167
Tea Time: 星と日本文化 *173*
第 25 講　球面振り子……174
Tea Time: ヤコビの楕円関数 *177*
第 26 講　剛体の回転……179
Tea Time: 太陽系はコマの群れ *184*
第 27 講　軸対称のコマ (ラグランジュのコマ) ……185
Tea Time: 歳差運動の簡単な説明 *189*
第 28 講　剛体の自由な回転 (オイラーのコマ) ……190
Tea Time: ネコの曲芸 *197*
第 29 講　非対称な剛体の運動……199
Tea Time: コワレフスカヤ *206*
第 30 講　コワレフスカヤのコマ……208
Tea Time: 逆立ちコマ *215*

索　　引……217

第1講

自励振動

—テーマ—

- ◆ 負抵抗
- ◆ ファン・デル・ポールの方程式
- ◆ Tea Time: 発振現象

抵抗と負抵抗

速度に比例した抵抗がはたらく単振動は線形の方程式

$$\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}+x=0 \tag{1}$$

で表される．これは1階の微分方程式に分解して

$$\begin{aligned}\dot{x}&=v\\ \dot{v}&=-\varepsilon\dot{x}-x\end{aligned} \tag{2}$$

と書ける．(2)によればある時刻の x と v を知れば次の瞬間の値 $x+(dx/dt)dt$, $v+(dv/dt)dt$ が定まる．すなわち運動の軌道は (x,v) 平面（相平面，位相空間）内で決定論的に決まり，軌道がたがいに交わることはない，$\varepsilon>0$ のとき図1のように軌道は原点に近づき，ついにはそこで静止する．軌道を引きつける点を一般にアトラクタという．この場合安定点である原点はアトラクタである．

もしも $\varepsilon<0$ ならば（1）あるいは（2）はしだいに成長する振動を表し（図2），アトラクタはない，この場合（$\varepsilon<0$ の場合），$\varepsilon\dot{x}$ の項は負抵抗と呼ばれる．負抵抗がある場合，初めに小さな運動があれば振幅はしだいに大きくなる．すな

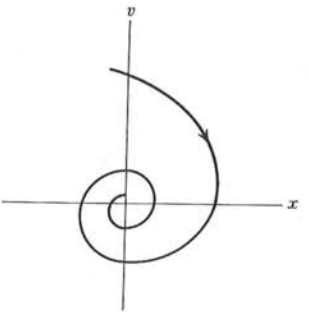


図1 抵抗（$\varepsilon>0$）

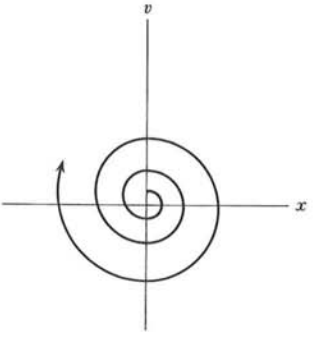


図2 発振（負抵抗，$\varepsilon<0$）

わち発振が起こる．

ファン・デル・ポールの方程式

ファン・デル・ポール（van der Pol）は3極真空管を使った電気振動の発振回路の研究から，発振機構の特徴をよく表す方程式を導いた．簡単化するとこの方程式は

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0 \qquad (\varepsilon>0) \tag{3}$$

と書ける．これをファン・デル・ポールの方程式という．$\varepsilon>0$としているから左辺第2項 $-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}$ は振幅が小さいとき（x^2が1より小さいとき）負抵抗を与えるので小さな振動はしだいに成長する．xは正と負の値をとるが，振幅が大きくなると $\varepsilon(1-x^2)$ は小さい値をとる時間が長くなるので負抵抗は効かなくなり，発振は抑えられることになる．これは計算機で確かめられる．

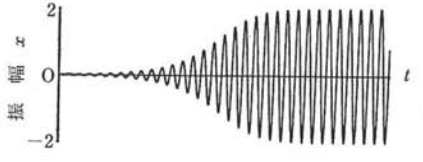


図3 ファン・デル・ポールの方程式の解（$\varepsilon=0.1$）

【εが小さいとき】 図3は$\varepsilon=0.1$としたときの計算結果である（初期値は$x=0.01$，$\dot{x}=0$）．この場合，振幅は2になるまで成長し，そこで飽和することがわかる．$\varepsilon=0.1$のときの相平面（x, $\dot{x}$）における軌道を図4に示す．原点に近いところから出発すると$t\to\infty$で軌道はある曲線に漸近する．このように漸

近する曲線を極限軌道（リミットサイクル）と呼ぶ．極限軌道も軌道を引き込むのでアトラクタの１種である．εが小さいとき極限軌道はほぼ円になり，その半径は２に近い．極限軌道の外の振幅の大きな状態から出発すると振幅はしだいに小さくなり，軌道は同じ極限軌道に巻きついてくる（この場合は $-\varepsilon(1-x^2)>0$ であって，この項は負抵抗ではなく，正の抵抗を与える）．

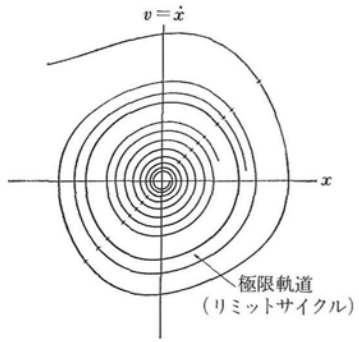


図4　相平面上の軌道（$\varepsilon=0.1$）

εが小さいとき振幅が２に漸近する理由は次のように証明される．

【証明】 極限軌道に達したとすると抵抗力 $-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}$ のする仕事の平均は０でなければならない．この仕事は $-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}\,dx$ であるから，$dx=\dot{x}\,dt$ を用いると振幅は

$$\int_0^T (1-x^2)\dot{x}^2\,dt=0 \qquad (4)$$

により決定されることになる．εが小さいときの極限軌道における振動は近似的に単振動で $x=a\cos t$ で表せると考えられる．aは極限軌道の振幅であり，(4)から

$$\int_0^{2\pi} (1-a^2\cos^2 t)\,a^2\sin^2 t\,dt=\pi a^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=0 \qquad (5)$$

を得る．この式の根のうちで $a=0$ は除外されるから，極限軌道の振幅は $a=2$ となる．∎

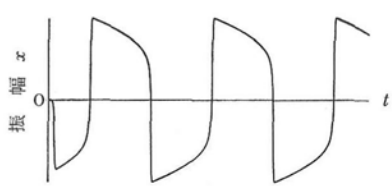


図5　ファン・デル・ポールの方程式の解（$\varepsilon=10$）

【εが大きいとき】 たとえば $\varepsilon=10$ とすると振動の様子は図５のようになり，相平面における極限軌道は図６のようになる．図５のようにほとんど静止した状態が続いたあとで急激に動き，またしばらくほとんど動かない状態になることを繰り返す．このような振動を弛緩振動という．このような振動は充電されると放電することによって周期的に発光するス

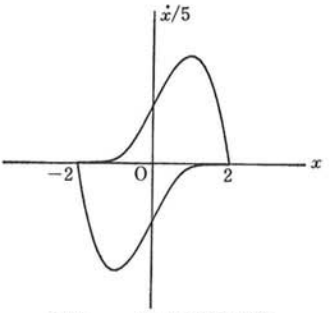


図6　$\varepsilon=10$ の極限軌道

トロボなどでみられる.

【自励振動】 ファン・デル・ポールの方程式における発振は電気的なエネルギーが注入されているから起こるのであるが電源は直流であって振動的ではない. 一般に振動的ではない外力のもとで生じる振動を自励振動という. ファン・デル・ポールの方程式で表される発振はその1例であるが, たてつけの悪い戸を開けるときガタガタいうのも, 糸を弦で引くとヴァイオリンが鳴るのも自励振動である. 身のまわりに自励振動の例はきわめて多い.

レイリーの方程式

ファン・デル・ポールの方程式（3）において $x=\sqrt{3}\,\dot{y}$ とおくと

$$\ddot{y}-\varepsilon(1-3\dot{y}^2)\ddot{y}+\dot{y}=0 \tag{6}$$

を得る. これを t で積分すると

$$\ddot{y}-\varepsilon(1-\dot{y}^2)\dot{y}+y=c\ (\text{定数}) \tag{7}$$

となるが, $y-c$ を改めて x とおくと

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-\dot{x}^2)\dot{x}+x=0 \tag{8}$$

を得る. これをレイリー (Rayleigh) の方程式という.

リエナールの方程式

減衰振動の式（1）やレイリーの方程式（8）などを一般化した式

$$\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+x=0 \tag{9}$$

をリエナール (Liénard) の方程式という. この式は

$$\frac{dx}{dt}=v$$
$$\frac{dv}{dt}=-\{x+\varphi(v)\} \tag{10}$$

と書けるので, 軌道を与える式は (10) の2式の比

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{x+\varphi(v)}{v} \tag{11}$$

で与えられる．軌道（v と x の関係）の式（11）は作図法によって次のように解くことができる．

まず相平面 (x, v) における曲線（リエナールの特性曲線）

$$x=-\varphi(v) \tag{12}$$

を作図する（図7）．次に任意の点 P(x, v) から x 軸に平行線を引き，特性曲線(12) との交点を R とする．R から x 軸に垂線を下ろし，その足を S とし，P を通り SP に垂直な線 PQ を引く．この直線 PQ は P を通る軌道の接線である．こうして各点における軌道の方向が決まるから，これを結んで軌道の形が求められる．

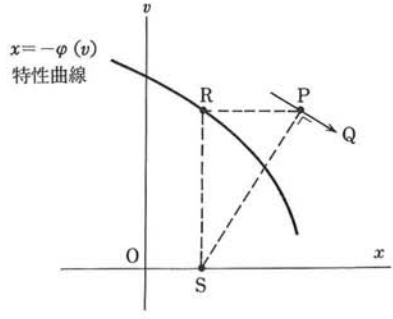


図7

【証明】 図7において P の x 座標は x であり，R の x 座標は $-\varphi(v)$ であるから $\mathrm{RP}=x-\{-\varphi(v)\}=x+\varphi(v)$．したがって SP が x 軸となす角 θ の正接（タンジェント）は

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{RP}}=\frac{v}{x+\varphi(v)} \tag{13}$$

であり，これに垂直な直線 PQ の傾きは

$$-\frac{x+\varphi(v)}{v}=\frac{dv}{dx} \tag{14}$$

である．これは（11）と一致するのでこの軌道の接線は PQ と一致する． ∎

【例】 減衰振動（1）の場合は $\varphi(v)=\varepsilon v$ であり，特性曲線は $x=-\varepsilon v$ なので軌道は図8のような作図で求められる．レイリーの方程式（8）の場合は $\varphi(v)=-\varepsilon(1-v^2)v$ であり特性曲線は $x=\varepsilon(1-v^2)v$ なので軌道は図9のような作図で求められる．

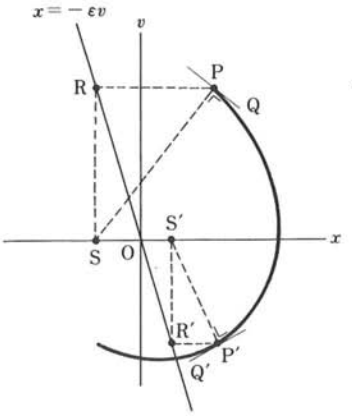


図8　減衰振動

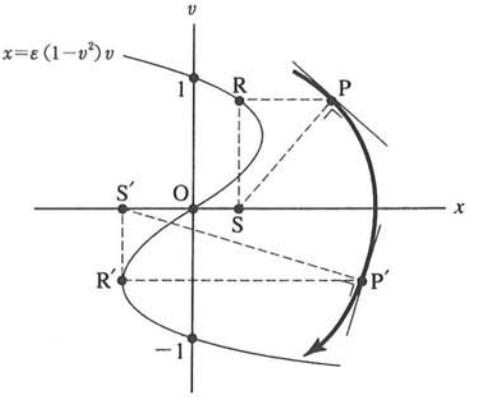


図9

Tea Time

発振現象

机を引きずって動かすとガタガタと振動することがある．白墨のもち方によっては振動して黒板に点線がえがけることがある．このように一定の運動をさせようとしたのに振動が起こるのが発振である．ひとりでに振動が起こるので自励振動という．

自励振動の例は身のまわりにいっぱいある．風に木の葉がそよぐのも，風で湖面が波立つのも自励振動といえるだろう．風が振動を与えなくても振動は生じる．

誰か風を見たでしょうか．
誰も風を見はしない．
それでも木の葉をゆるがせて
風はそっと通り過ぎて行く．

日本的な庭の静けさを破って竹の筒が石を打つ音が時折り聞こえることがある．いわゆる鹿おどしである．細い水の流れが竹の筒を満たすとその重さで筒が傾くと同時に筒から水が流れ落ちて筒はもとの姿勢に戻り，そのときに石を強く打つのである．これはまったく違うが一定の時間間隔で写真のフラッシュが点滅

するストロボに似ている．電気が蓄電器にためられると放電する装置である．クリスマスのツリーなどに点滅する豆電球がたくさんつけられているが，あれは点灯すると電球の中のバイメタルが暖められて曲がるために電流が一時切れるからである．

自励振動の原因は，乾性摩擦から電気的なものまで実にさまざまであるが，数式で表そうとすればファン・デル・ポールの方程式か，あるいはそれに類似した式で表される．これもおもしろいことである．

第 2 講

ロジスティック方程式

—テーマ—

- ◆ 力学系
- ◆ ロジスティック方程式
- ◆ Tea Time: 人口爆発

力学系の一般化

簡単のため質量が 1 の質点が x 軸に沿って運動しているとし，その位置を x，速度を v とすると運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=v(x,t)\\ \frac{dv}{dt}&=f(x,v,t)\end{aligned}\qquad(1)$$

で与えられる．自由度が f の運動ならば運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt}&=v_j(x_1,x_2,\cdots,x_f,t)\\ \frac{dv_j}{dt}&=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_f,v_1,v_2,\cdots,v_f,t)\end{aligned}\qquad(2)$$

$$(j=1,2,\cdots,f)$$

となる．これを一般化して n 個の 1 階の微分方程式

$$\frac{dx_j}{dt}=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)\qquad(j=1,2,\cdots,n)\qquad(3)$$

によって記述されるような体系を力学系という．一般化された，あるいは広い意味の力学系である．本来の力学系ならば変数が座標と速度の対をなすので n は偶数に限られるが，一般化された力学系では n は奇数の場合も偶数の場合もある．

たとえば化学反応が時間的に進行するとき，j 番目の化学成分の量を x_j とすれば（3）は化学反応を表す方程式である．また x_j を生物の種 j の個体数とすれば（3）は生態系の時間的変化を表すことになる．

ロジスティック方程式

そこである国の人口，あるいは生態系におけるある種の個体数 N の時間変化を考え，一番簡単な仮定として個体数 N の変化の速度が N に比例するとすれば，その変化は微分方程式

$$\frac{dN}{dt}=kN \tag{4}$$

で与えられる．これを積分すれば

$$N=N_0e^{kt} \tag{5}$$

を得る．ここで N_0 は $t=0$ における N の値である．もしも $k<0$ ならば N は時間の経過につれて減少するが，$k>0$ ならば N は時間とともに増大する．

時間を不連続にして微分係数 dN/dt の代わりに $(N_{n+1}-N_n)/\tau$（τ は定数）を用いれば（4）の代わりに

$$N_{n+1}-N_n=k\tau N_n \tag{6}$$

を得る．このとき

$$\begin{aligned} N_{n+1}&=(1+k\tau)N_n \\ &=(1+k\tau)^2N_{n-1}=\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

であるから

$$N_n=(1+k\tau)^nN_0 \tag{8}$$

となる．$k\tau>0$ ならば個体数 N_n はいわゆるネズミ算的に増大する．

$\tau=t/n$ とおけば

$$(1+k\tau)^n=\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n=\left\{\left(1+\frac{kt}{n}\right)^{n/kt}\right\}^{kt} \tag{9}$$

と書け，$n\to\infty$ の極限では

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n/a}=e \tag{10}$$

により（8）は（5）に帰する．

実際に個体数が増えすぎると，そのために環境が悪化するなどの影響が加わって増加を抑える要因が生じる．これを取り入れる方法として一番簡単なのは変化率 $k(k>0)$ が N の増加とともに減少するとして

$$k=\alpha(1-\beta N)\qquad(\alpha,\beta>0) \tag{11}$$

とおくことであろう．こうすると（1）は

$$\boxed{\frac{dN}{dt}=\alpha N(1-\beta N)} \tag{12}$$

となる．この方程式をロジスティック (logistic) 方程式という．ロジスティックとはもともと軍隊で軍需品や食糧などを前線に送る後方部隊を意味し，兵站（へいたん）と呼ばれる．これから転じて物資の流通，すなわち物流をロジスティックという．

(12) は右辺に N^2 項をもつからいちおう非線形方程式である．しかし (12) を N^2 でわると

$$\frac{1}{N^2}\,\frac{dN}{dt}=\alpha\left(\frac{1}{N}-\beta\right) \tag{13}$$

となり，書き換えると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{N}-\beta\right)=-\alpha\left(\frac{1}{N}-\beta\right) \tag{14}$$

となる．これは $1/N$ について線形である．(12) は線形化されたのである．このように一見非線形であるようにみえても変数の置き換えによって線形化できる場合もある．どのように変数を置き換えても線形化できない場合が本当の非線形方程式であるといいたいところであるが，これでは与えられた方程式が本当に非線形であることを立証することは事実上不可能になってしまう．ふつうは線形化する方法が簡単に見出されないものを非線形といっているのであるが，非線形性を厳密に規定するのはむずかしい．

さて (14) を積分すれば

$$\frac{1}{N}-\beta=\left(\frac{1}{N_0}-\beta\right)e^{-\alpha t} \tag{15}$$

となるので (12) の解は

$$N=\frac{1}{\beta+\left(\frac{1}{N_0}-\beta\right)e^{-\alpha t}} \tag{16}$$

で与えられる.

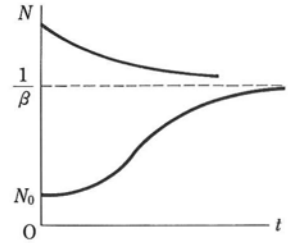


図 10 ロジスティック曲線

$\alpha>0$ としているから, $t=0$ のときの値 N_0 によらず $t\to\infty$ で $N\to 1/\beta$ となる. N と t の間の関係は図 10 のようになる. この曲線はロジスティック曲線という.

線形の式 (14) を差分化すると

$$\left(\frac{1}{N_{n+1}}-\beta\right)-\left(\frac{1}{N_n}-\beta\right)=-\alpha\tau\left(\frac{1}{N_n}-\beta\right) \tag{17}$$

となる. この式は

$$N_{n+1}-N_n=\alpha\tau N_{n+1}(1-\beta N_n) \tag{18}$$

と書き換えられる. (18) は (17) のように線形化できるのである. その解は (17) を用いて

$$N_n=\frac{1}{\beta+\left(\frac{1}{N_0}-\beta\right)(1-\alpha\tau)^n} \tag{19}$$

であることがわかる. N_n は n についてなめらかな変化をし, その様子は (16) のロジスティック曲線と本質的に違わない ($\tau=t/n$ として $n\to\infty$ にすれば (19) は (16) に一致する).

(12) の差分化した方程式として

$$N_{n+1}-N_n=\alpha N_n(1-\beta N_n) \tag{20}$$

も考えられる. この式を (17) のように線形化することはできない. β が小さいときは (20) の解はロジスティック曲線と同様のなめらかな変化を与えるが, β がある値を超えると (20) の N_n は n に対してカオス的な変化をするようになる. このことについては第 5 講で述べることにする.

Tea Time

人口爆発

ネズミ算というのがある．初め少数しかいなかったネズミが増殖を繰り返すと，とんでもなく多数になり，やがて天文学的な数になってしまう．むかし曽呂利新左衛門とかいう知恵者がいて，大閤秀吉から何なりとほうびを取らせるといわれて毎日2倍ずつ米粒を所望したという話がある．やがて米粒の数は莫大になったことであろう．人間は初め1個だった細胞が分裂することによってできあがる．その分裂の回数は約80回だときいたことがある．1人の人間は約2^{80}個の細胞からできていることになる．小さいような大きいような数である．

本当だかどうだか知らないが，ネズミは増えすぎると川へ入って集団自殺するという話がある．昔話に，街に増えすぎたネズミを笛の音で呼び集めて川へ入水させて退治したというのはこんなところからつくられた話かもしれない．

世の中には増えるメカニズムでどんどん増えるものがある．しかし増えすぎると増加を抑えるメカニズムがはたらき出す．人口の増加も昔は確かにそうであった．しかし世界の人口は農業革命のときに飛躍的に増加し，その後増加率はしだいに停滞したのが，産業革命後また上向きになって現在に至った．自然に増加を抑えるはずの抑制力を技術の進歩で取っ払ってきたのである．そしていまや人類は人口爆発という危機に直面している．いろいろの危機がいわれているが，そのほとんどは世界の人口のとめどもない増加によって起こるように思われる．これに対しては増加を抑える従来のメカニズムは無力である．とすれば，ロジスティック方程式を越えたものがありうるかどうかという深刻な問題をわれわれはかかえていることになる．これは人類のアキレス腱である．

第 3 講

ロトカ-ヴォルテラの方程式

—テーマ—

- ◆ 生物の個体数の変化
- ◆ ロトカ-ヴォルテラの方程式
- ◆ Tea Time: 生態系

生態系の個体数の変化

第2講で扱ったロジスティック方程式を2変数 (x, y) の場合に拡張したものとして

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x - k_1 xy \qquad (\varepsilon_1, k_1 > 0) \\ \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon_2 y + k_2 xy \qquad (\varepsilon_2, k_2 > 0) \end{aligned} \tag{1}$$

を考えよう．$\varepsilon_1, \varepsilon_2$，$k_1, k_2$ はすべて正であるとするとこの連立方程式は個体数 x の草食動物とこれを食べて生活する個体数 y の肉食動物が草が十分ある場所で共存している生態系を表すことになる．草食動物 (x) は草を食べて増殖 $(\varepsilon_1 x)$ するが，肉食動物 (y) に会う（その確率は xy に比例する）と食べられて減る $(-k_1 xy)$．肉食動物は草食動物に会えばこれを食べて栄養とするのでその増殖の割合は $k_2 xy$ で与えられるが，自然死のために減少 $(-\varepsilon_2 y)$ すると考えるのである．(1) は生態系の変化を表すロトカ-ヴォルテラ (Lotka-Volterra) の方程式

の一番簡単な場合である．

x,y を与えると dx/dt，dy/dt が決定されるから（1）は決定論的な方程式である．すなわちある時刻の x と y を与えると次の瞬間の x と y が一義的に定まるから軌道は (x,y) 面で交わることがない．ここで一般に2次元の (x,y) 面の有限な領域で交わることのない軌道はきわめて限られたものになることを注意しておこう．たとえば摩擦のない単振動では (x,v) 面（相平面）内で軌道は閉曲線（楕円）をえがく．摩擦がある振り子では軌道はしだいに安定点へ近づく．

さて（1）には

$$\frac{e^{k_2x+k_1y}}{x^{\varepsilon_2}y^{\varepsilon_1}}=\text{一定} \tag{2}$$

あるいは対数をとって

$$k_2x-\varepsilon_2\log x+k_1y-\varepsilon_1\log y=\text{一定} \tag{3}$$

という保存量があることが示される．

【証明】（1）の第1式の両辺に k_2 を，第2式の両辺に k_1 をかけて両式を加えると

$$k_2\frac{dx}{dt}+k_1\frac{dy}{dt}=\varepsilon_1k_2x-\varepsilon_2k_1y \tag{4}$$

となる．他方で同じ（1）の第1式に ε_2/x を，第2式に ε_1/y をかけて両式を加えると

$$\varepsilon_2\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}+\varepsilon_1\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=\varepsilon_1k_2x-\varepsilon_2k_1y \tag{5}$$

を得る．（4）と（5）の右辺は等しいから

$$k_2\frac{dx}{dt}+k_1\frac{dy}{dt}=\varepsilon_2\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}+\varepsilon_1\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \tag{6}$$

これを積分すれば（3）が得られる．∎

（1）の図式解法

（2）において

$$\xi=x^{-\varepsilon_2}e^{k_2x}$$
$$\eta=y^{\varepsilon_1}e^{-k_1y} \tag{7}$$

とおけば（2）は

$$\xi = c\eta \qquad (c=\text{定数}) \qquad (8)$$

と書ける．c は初期条件で決まる定数である．

まず図 11 のように $x\sim\xi$ と $y\sim\eta$ の曲線をえがいておく．初期値 $A(x_0, y_0)$ を与えてこれに相当する点 $A'(\xi_0, \eta_0)$ を定める．そして直線 OA′ を $\xi = c\eta$ とする $(c=\xi_0/\eta_0)$．次に A′ に近い点 B′ をとりこれに対応する点 B を定め，同様にしてつぎつぎと，C, D, …を求めて点 ABCD …を結べば (x, y) 面の軌道が得られる．

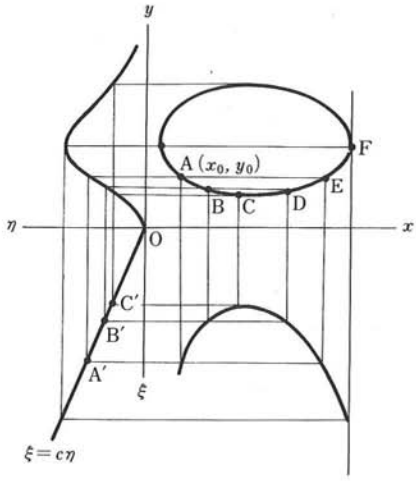


図 11

x, y を t の関数として示せば図 12 のように，x と y はたがいに少し位相のずれた周期的な曲線になる．草食動物をウサギ (x) とし，これを食べるキツネを肉食動物 (y) とすれば，キツネがウサギを食べて殖えればウサギは食べられて減り，ウサギが減ればこれを食物とするキツネも減り出す．キツネが減ればウサギが殖える．こういうことを周期的に繰り返すのである．

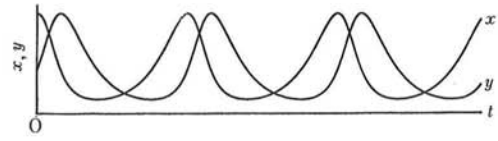


図 12

一般的なロトカ-ヴォルテラの方程式

ロトカ-ヴォルテラの方程式を生物の種の数が $n(\geq 2)$ の場合に拡張して

$$\frac{dN_j}{dt} = \varepsilon_j N_j + \frac{1}{\beta_j}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} N_j N_k \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \qquad (9)$$

としよう．ここで α_{jk} は反対称，すなわち

$$\alpha_{jk} = -\alpha_{kj} \qquad (10)$$

とし，（9）は定常解 $dN_j/dt=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$ をもつとする．定常解の N_j の値を $\bar{N}_j$ とすれば

$$\varepsilon_j\beta_j+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\bar{N}_k=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

である．

（9）は保存量

$$G=\sum_{j=1}^{n}r_j(e^{x_j}-x_j) \tag{12}$$

をもつことが示される．ただしここで

$$\begin{aligned} x_j&=\log\frac{N_j}{\bar{N}_j}\\ r_j&=\beta_j\bar{N}_j \end{aligned} \tag{13}$$

である（$n=2$ のとき保存量（12）は（3）を与えることが容易に示される）．

【証明】（13）と（9），(11) から

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt}&=\frac{1}{N_j}\frac{dN_j}{dt}=\varepsilon_j+\frac{1}{\beta_j}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}N_k\\ &=\frac{1}{\beta_j}\sum\alpha_{jk}(N_k-\bar{N}_k) \end{aligned} \tag{14}$$

を得る．さらに書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{jk}\beta_k\bar{N}_k}{\beta_j\beta_k}\left(\frac{N_k}{\bar{N}_k}-1\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}r_k(e^{x_k}-1) \end{aligned} \tag{15}$$

となる．ただし

$$\gamma_{jk}=\frac{\alpha_{jk}}{\beta_j\beta_k}=-\gamma_{kj} \tag{16}$$

とおいた（ここで（12）により

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}=r_k(e^{x_k}-1) \tag{17}$$

であることに注意すれば

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}\frac{\partial G}{\partial x_k} \tag{18}$$

と書けることもわかる）．

さて (12) を t で微分して (15) を用いれば

$$\frac{dG}{dt}=\sum_{k=1}^{n} r_k(e^{x_k}-1)\frac{dx_k}{dt}$$
$$=\sum_{k,l} r_k(e^{x_k}-1)\gamma_{kl}r_l(e^{x_l}-1)$$
$$=\sum_{k,l} \gamma_{kl}r_k r_l(e^{x_k}-1)(e^{x_l}-1) \tag{19}$$

となるが，右辺で k と l とを取り換えると $\gamma_{lk}=-\gamma_{kl}$ なので $dG/dt=-dG/dt$ が導かれる．したがって

$$\frac{dG}{dt}=0 \tag{20}$$

すなわち G は保存量である． ∎

V$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 空間における流れ

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を座標とする状態空間（位相空間）V を考えるとこの中の 1 点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ はこの生態系のミクロ状態を表す．このようにミクロ状態を表す点を統計力学では代表点という．そこで V 空間内に代表点の連続的な分布を考え，その密度を $\rho(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とするとき，各代表点は (18) によって移動するが，その流れに乗ってみれば密度 ρ は不変に保たれる（この性質は力学系においてリゥヴィル (Liouville) の定理と呼ばれ，統計力学の基礎をなすものであるが，ロトカ-ヴォルテラ系においてもこれが成立するのである．これを基礎にして生態系の統計力学が試みられ，ある程度成功している）．この不変性は

$$\frac{d\rho}{dt}=0 \tag{21}$$

と書かれる．

【証明】 代表点の密度 $\rho(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ の微分は一般に

$$d\rho=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}dx_j+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt \tag{22}$$

と書ける．代表点の流れに乗ってみるとき

$$\frac{dx_j}{dt}=\dot{x}_j \tag{23}$$

は流れの速度である．V 空間内に $x_1\sim x_1+\Delta x_1$，$x_2\sim x_2+\Delta x_2, \cdots$，$x_n\sim x_n+\Delta x_n$

の微小部分（体積$=\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_n$）を考えると，$x_1$ 軸に垂直な面を単位時間に通過する代表点の数は $\rho(x_1, x_2, \cdots, x_n)\dot{x}_1\Delta x_2\cdots\Delta x_n$ であり，$x_1+\Delta x_1$ において x_1 軸に垂直な面を単位時間に通過してこの領域から出ていく代表点の数は

$$\left\{\rho\dot{x}_1+\frac{\partial(\rho\dot{x}_1)}{\partial x_1}\Delta x_1\right\}\Delta x_2\cdots\Delta x_n \tag{24}$$

である．したがってこの領域の中の代表点の増加は

$$\begin{aligned}\rho\dot{x}_1\Delta x_2\cdots\Delta x_n-\left\{\rho\dot{x}_1+\frac{\partial(\rho\dot{x}_1)}{\partial x_1}\Delta x_1\right\}\Delta x_2\cdots\Delta x_n&\\ =-\frac{\partial(\rho\dot{x}_1)}{\partial x_1}\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_n&\end{aligned} \tag{25}$$

となる．他の軸に垂直な面についても同様であるから，領域内の代表点の数 $\rho\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_n$ の変化の割合は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_n=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\rho\dot{x}_j)}{\partial x_j}\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_n \tag{26}$$

となる．したがって (22) を dt でわった式と (26) から

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}&=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\dot{x}_j\\ &=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\rho\dot{x}_j)}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\dot{x}_j\\ &=-\rho\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\dot{x}_j}{\partial x_j}\end{aligned} \tag{27}$$

この右辺に (18)（$\dot{x}_j=dx_j/dt$）を代入すれば γ_{jk} の反対称性により

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\dot{x}_j}{\partial x_j}=\sum_{j,k}\gamma_{jk}\frac{\partial^2 G}{\partial x_j\partial x_k}=0 \tag{28}$$ ∎

Tea Time

生態系

バルカン半島とヨーロッパの境にアドリア海がある．そのアドリア海で取れる魚の数が，多い年の次には少ない年が来るというふうに周期的に変化することが知られていた．これを聞いたロトカ (A. J. Lotka) が報告をまとめ，ヴォルテラ (V. Volterra) が数理的な考察を加え，ロトカ-ヴォルテラの方程式がつくられた．これは生態系の問題が数理的な発展をうながした著しい例の1つである．ロジスティック方程式がいわば静的な安定化を表すのに対して，ロトカ-ヴォルテラの方程式はより動的な生態系を表している．

アドリア海は豊富な食糧をもつなどロトカ-ヴォルテラ系が成り立つための前提条件を満足する場所であったのだろう．同じように草食動物にとって豊富な食糧のあるカナダの草原などで，たとえば草食動物のウサギと，これを餌とするキツネの数がたがいに関係し合いながら変動する様子がロトカ-ヴォルテラの方程式で記述されることがよく知られている．

このようにロトカ－ヴォルテラ系はいわばマクロな動物の生態系について考え出されたものであるが，ミクロの生物，すなわち微生物がより広い応用をもつであろう．そして外界からの影響に対する生態系の応答が興味深い．おそらく非生物系である物理系が非可逆的であるように，生態系も非可逆的であるに違いない．

本文にも述べたとおり，ロトカ-ヴォルテラの方程式系はエネルギーに相当する保存量をもち，ハミルトン運動方程式の形に書けるが，とくに簡単な場合や戸田格子（第11講以下参照）に帰せられる特別の場合を除き，この体系にはそれ以外に保存量がなく，可積分系ではない．したがって一般にカオス的，あるいはエルゴード的である．そのためロトカ-ヴォルテラ系の統計力学も考えられ，ある程度の成功を収めている．これを非平衡の場合に拡張することも期待される．

生態系は一般にいえばカオス的であろう．しかもカオス的でありながら平衡から大きく離れた非平衡の状態で自己組織化された生態系が擾乱に対して安定な体系として存在しているようである．それは非平衡の組織化された状態が圧倒的に多くのミクロ状態をもつということかもしれず，そのパラドックス的なところであるように思われる．よくいわれるように生物には熱力学でいう外界との熱平衡

の状態はない．それが生物の特徴で，熱平衡は生物の機能をやめたときのことである．生態系も同じである．生態系も生物の個体と同じく熱平衡の状態にはない概念である生命をもつ体系である．

物質の存在理由は物理的には解明できないともいわれる．生命の存在理由も究極的には解明できない問題であるように思われる．ある人は存在理由を求めて科学に入るかもしれないし，時折そこへ帰ろうとするとしても，科学は結局，存在するものを認める立場を出られない．

第 4 講

ローレンツ系のカオス

—テーマ—

◆ 対流
◆ ローレンツの方程式
◆ Tea Time: ベナールの渦

対　　流

変数の数が3以上（3を含む）の力学系は一般にカオスになる．生態系のロトカ−ヴォルテラ系も一般に種の数 n が3以上のときは個体数の変動はカオスになるのである．このことをはっきりさせたのはアメリカの気象学者ローレンツ（E. N. Lorenz）であった．

液体，あるいは流体の下部を上部よりも高い温度に保つとき，温度差が小さい間は流体は静止し，熱伝導で熱が移るだけである．しかし温度差を少し大きくすると対流が生じる．流体の層の厚さが小さいと対流は制限されて特徴的なパターンの対流ができる．これをベナール（Bénard）の対流，あるいはレイリー−ベナールの対流という．レイリー（Rayleigh）はこの対流の発生条件を理論的に研究したのである．

地球の表面は約 10 km の空気の層で覆われている．地理的な距離に比べれば大気はきわめて薄い層なのであるが，この中の対流は複雑な気象現象を生じる．ローレンツはこのような大気のベナール対流の計算機によるシミュレーションを

行っていた．初め彼は12個の変数の連立方程式を計算機にかけていたが，1961年にこの計算の結果が初期値にきわめて敏感であることを偶然発見し，初期値敏感性を詳しく調べるため方程式を簡単化してしかも問題の本質を失わない3変数の体系を考え出した．これをローレンツの方程式（ローレンツ系）といい

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\sigma(x-y)\\ \frac{dy}{dt}&=Rx-y-xz\\ \frac{dz}{dt}&=-bz+xy\end{aligned}\qquad(1)$$

で与えられる．ここでxは対流の強さ，yは上昇する流れと下降する流れの温度差，zは上下方向の温度分布のフーリエ係数をそれぞれ表す．定数σはプラントル数 $\sigma=\nu/D_T$（νは動的粘性率η/ρ, D_Tは熱の拡散率），Rはレイリー数$R=\rho g\alpha d^3\Delta T/\eta D_T$（$\rho$は密度，$g$は重力加速度，$\alpha$は熱膨張率，$d$は流体の厚さ，$\eta$は粘性率，$\Delta T$は上下の温度差），$b$は対流の空間的周期に関係する定数（周期を$2\pi/q$として$b=4\pi^2/(\pi^2+q^2)$）で，すべて無次元の定数である．ローレンツは

$$\sigma=10,\qquad R=28,\qquad b=\frac{8}{3}$$

とした．もしもRとして24.74よりも小さい数値を与えると定常的な安定した対流が生じる．$R=28$は非定常な対流が発生する臨界値よりも少し大きい値である．

ローレンツは（1）を数値的に解いた結果を1963年に発表したが，その結果はたいへん複雑である．この結果はコンピュータなしには得られなかったに違いない．コンピュータは新しく微細な世界をみせてくれたのである．

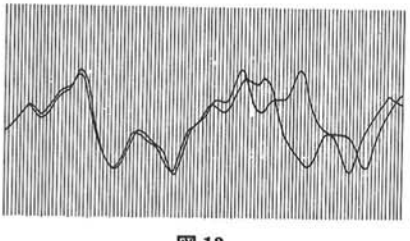


図13

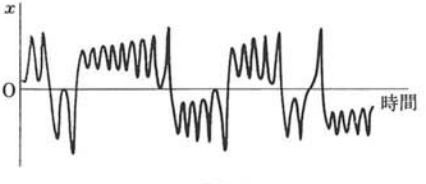


図14

図13はローレンツ系の初期値敏感性を示す．初めにごくわずか異なった初期値から出発したとき，しばらくするとまったく違った変化を示すようになる．この図は煙や湯気の動きを思わせる．図14は変数xの不規則な変動の1例である．

変数が3個なので水平方向にx軸とy軸をとり，鉛直上方にz軸をとると，この3次元空間で状態を表す点の軌道は2枚の羽根のようなところをぐるぐると回っては時折こちらからあちらへと飛び移る（図15.bは模式図）．一方を何度回ったら他方へ行くかは定かではないし，他方へ行って戻ってきたときはもとの軌道の間の新しい軌道をたどる．その振舞いはきわめて微妙でストレンジアトラクタと呼ばれている．アトラクタは軌道を引きつける点，あるいは領域のことで，減衰振動の静止点のような点やファン・デル・ポールの方程式などに現れる極限軌道（リミットサイクル）もアトラクタである．これらは2変数(x, v)のときのアトラクタであるが，ストレンジアトラクタは3変数以上の体系で現れる．もちろん方程式は決定論的であるから軌道は交らない．3変数の場合は軌道が3次元空間で立体交差するのでストレンジアトラクタが可能なのである．ストレンジアトラクタはその一部を拡大してみると，その中に同じような構造をもち，いわゆるフラクタル的な複雑さをもっていることがわかる．すでに述べたように軌道の大部分は2枚の羽根に乗っているようにみえるが，これらは完全な平面ではなくて，やはりフラクタル的である．言い換えればこれらの羽根は2次元の平面ではなく，2にきわめて近い非整数のフラクタル次元をもっている．

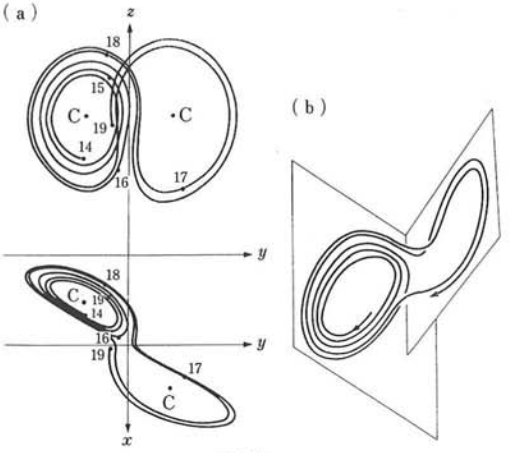


図15

位相空間の体積

ローレンツ系の状態を表す点の軌道はストレンジアトラクタのまわりをいつま

でもさまよい，静止することがない．しかしこの体系はエネルギーのように保存する量をもたない．（2）からわかるように dx/dt は $-x$ に比例する項をもち，y と z も同様であるから減衰，あるいは散逸的な性質をもっている．しかし同時に他の変数によって駆動される（ロトカ-ヴォルテラ系でも似たことがあったが，保存量 G が存在するので保存系であった）．

エネルギーが散逸する典型的な例である減衰振動はしだいに振動が減衰して最後に静止する．この場合，位相空間 (x, v) の中に代表点の集まった領域を考えると，代表点が静止点に近づくにつれて領域の面積はしだいに0に近づくことになる．位相空間の体積がこのように0に近づくのが散逸系の1つの特徴である．

ローレンツ系においても，位相空間 (x, y, z) の体積 V はしだいに減少する．このとき

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}=-(\sigma+1+b) \tag{2}$$

となるからである．

【証明】　ロトカ-ヴォルテラ系の場合に示したように（第3講 (27)），位相空間を $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とするとき

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j} \tag{3}$$

が成り立つ．ここで ρ は位相空間の微小部分における代表点の密度であって，この代表点の数を n，これが占める位相空間の体積を V とすれば

$$\rho V=n \tag{4}$$

は代表点の流れに沿っていくとき一定であるから

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \tag{5}$$

したがって

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j} \tag{6}$$

さて，ローレンツ系（1）においては（$\dot{x}=dx/dt$ など）

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}=-\sigma, \qquad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y}=-1, \qquad \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}=-b \tag{7}$$

したがって位相空間の体積の変化率は

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=-(\sigma+1+b) \tag{8}$$

となる．σ と b はともに正としているので

$$V=V_0e^{-(\sigma+1+b)t} \tag{9}$$

の形で位相空間の体積は指数関数的に小さくなる．

レスラー系

ストレンジアトラクタをもち，ローレンツ系よりも簡単なモデルがレスラー系である．これは

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-(y+z)\\ \frac{dy}{dt}&=x+\frac{1}{5}y\\ \frac{dz}{dt}&=\frac{1}{5}+z(x-\mu)\end{aligned} \tag{10}$$

で与えられる．μ は定数で $\mu=5.7$ としたときの軌道の様子を図 16 に示す．この系では

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{1}{5}+x-\mu \tag{11}$$

であるが，x は図 17 のように正負の値をとるので，$\mu=5.7$ のとき長時間的には

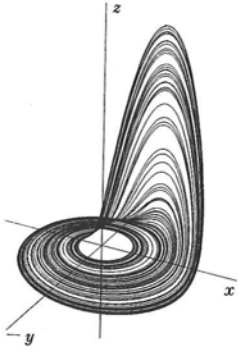


図 16

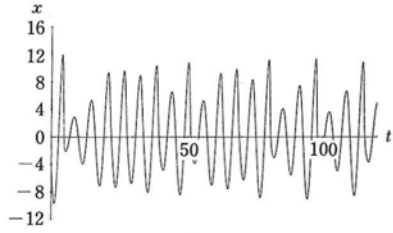


図 17

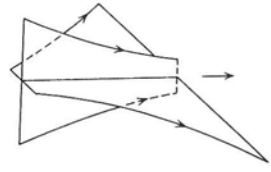


図 18

$dV/dt<0$ である．

レスラー系において代表点が占める領域は1つの方向に広がり，これに垂直な方向には縮まって図18のように変形することが示される．この延び縮みは指数関数的の変形であって，その指数はリアプノフ数と呼ばれている．

リアプノフ数の1つが正であれば他のものは負となり，ストレンジアトラクタはレスラー系の場合のように帯状につぶれて広がる．軌道はこのようにして折り畳みの変形を受ける．カオスはこのような折り畳みの操作によって発生する．

Tea Time

ベナールの渦

ベナールの渦というとすぐ思い出すのは熱いみそ汁の中の対流である．火にかけた鍋のみそ汁はもっと盛んに対流を起こす．ガラスの紅茶ポットの中では紅茶の葉が対流につれて動く．これを眺めて心を遊ばせるときは本当のティータイムである．

寺田寅彦先生の随筆に，熱い茶の表面にかすかにみられる湯気のことを書いたのがあった．明るい光を当ててよく注意してみると茶の水面に密着するようにして立ち上がる湯気がみられるが，そこに湯の表面近くの渦の境が割れ目の境界線を表すような湯気のすじがあって，弱い風を送るとそのすじがひらひらと組み換えられて動く．そういう微妙な湯気の動きのことが書いてあった．

これとはまったく関係がないのだが，北極や南極に近いノルウェー，カナダ，南極の基地でよくみられるオーロラは空から下がった薄いカーテンともみえ，また上空へ立ち上る湯気のようにもみえるが，それがひらひらと動く様子はまさに熱い茶の表面にたゆとう湯気の渦のようでもある．両者の間には何か似たところがあるような気がする．それは不安定さをもったある組織といえるかもしれない．

寺田先生は渦や割れ目に特別な興味をもっていた．対流渦に関する寺田先生の研究がベナールの研究に数年遅れたのはおしいことだともいえる．ベナール渦などの研究をしているスペインの知人から寺田先生の渦やカオスに関する論文をコ

ピーして送ってくれと頼まれて，コピーをしてもらって送ったことがある．寺田先生の英文論文集が再刊されたとき，買いたく思ったが書斎が狭くて困っている実状なので残念ながら見送ったこともある．

地表の大気の約 10 km の厚さの対流圏で多くの気象現象が起こる．10 km といえば歩いても 2 時間ちょっとで行けるから，大気の厚さは地理的な距離に比べて実に薄いのである．台風などは直径何百 km もあるが，厚さは約 10 km だから 1 円玉のように薄べったいのである．薄い液体の層の中のベナール対流よりももっと薄いといってよいだろう．

夏の日に暖められた地面から上昇する大気は上がるにつれて断熱膨張によって冷却し，中の水蒸気が雄大な積乱雲をつくる．これが発達すると強い夕立になり，下降気流ができるとともに上昇気流は弱まってしまう．こうして上昇気流が生じてから消滅するまでの時間は 1 時間程度であるという．積乱雲の大きな雲の峰はこうしてつぎつぎと生長しては消滅する上昇気流によるものである．このように世代交代を繰り返す対流渦を表す簡単な数学的モデルはあるのだろうか．

第5講

1次元写像のカオス

—テーマ—

- ◆ ロジスティック写像
- ◆ カオス
- ◆ Tea Time: 不連続時間

ロジスティック写像

第2講で述べたロジスティック方程式は連続的な時間に対する方程式でなめらかな時間経過を与える．これは実は線形化できるもので，線形化した形で時間を差分化してもやはりなめらかな時間経過をすることもすでに述べた．しかし差分化の仕方によってはカオスが発生することが知られている．

ロジスティック方程式を

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N(1-\beta N) \qquad (1)$$

とする．時間を不連続にとり，n を整数として

$$t=n\tau \qquad (\tau=\text{定数}) \qquad (2)$$

とおく．また $N(n\tau)=N_n$ と書き（1）の左辺を差分化した方程式

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{\tau}=\alpha N_n(1-\beta N_n) \qquad (3)$$

を考える．さらに簡単化するため

$$x_n=\frac{\alpha\beta\tau}{1+\alpha\tau}N_n$$
$$a=1+\alpha\tau \qquad (4)$$

とおくと（3）は

$$\boxed{x_{n+1}=ax_n(1-x_n)} \qquad (5)$$

となる．（5）は x_n を x_{n+1} へ移す写像とみることができ，これをロジスティック写像という．

（5）を解析的に解くことはできない．しかし x_n を与えて x_{n+1} を求める操作はコンピュータあるいは作図によって簡単に行うことができる．作図法によって考察しよう．

x_n を横軸に，x_{n+1} を縦軸にとる（図19）．（5）すなわち $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ は $x_n=1/2$ に対して対称な放物線を与える．そこで x_n を決めたとき x_n を通り x_{n+1} 軸に平行な直線を引いて放物線と交わる点から水平線を引けば，これが x_{n+1} 軸と交わる点が x_{n+1} を与える．これが写像 $x_n \to x_{n+1}$ であるが，さらに図20のように45°の対角線を用いれば x_{n+1} の値をただちに x_n 軸に移し，同じ操作を続ければ x_{n+2}，x_{n+3}，… を求めることができる．

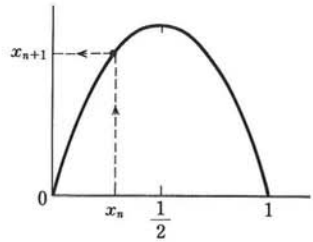


図19

カオスの出現

写像は図20のようにパラメタ a の値によって異なる．

（a） $0<a<1$ のとき．どのような値 x_0 から出発しても $x_n \to 0 (n \to \infty)$ となる．

（b） $1<a<2$ のとき．どのような値 x_0 から出発しても $x_\infty=ax_\infty(1-x_\infty)$ で与えられる値 x_∞ に近づいていく．

（c） $2<a<3$ のとき．ある値 x_∞ の上下を振動しながら x_∞ に近づく．

（d） $3<a<3.449\cdots(=1+\sqrt{6})$ のとき．n が少し大きくなると x_n は2つの値の間を振動するようになる（2周期）．

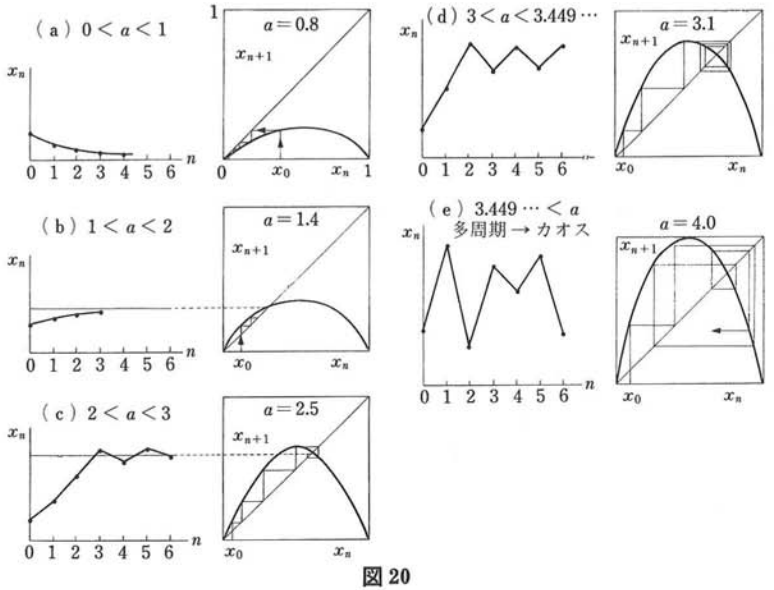


図 20

(e)　$1+\sqrt{6}<a<3.57\cdots$ のとき．a を $1+\sqrt{6}$ よりも少し大きくするとたちまち4周期になり，さらに大きくするとしだいに急速に 2^3 周期，2^4 周期，…になる．そして $a_\infty=3.57\cdots$ において 2^∞ 周期が現れる．

さらに $a_\infty<a\leq 4$ のとき x_n の変動は不規則で，初期値 x_0 をわずかに変えただけでまったく異なる変化を示すようになる．この状況をカオスという．

しかし a の値のところどころで単純な周期的変動が現れることがあり，これを窓と呼んでいるが，6周期の窓，3周期の窓などもあり，写像は非常に複雑な様相を示す．窓ができるというのは決定論的な変化であるのにカオスになる（決定論的カオスという）場合の大きな特徴である．

なお写像 $x_n \to x_{n+1}$ は一義的（決定論的）であるが，x_{n+1} を与えたとき，その前の x_n は一般に2つの値をとりうる（図19参照）から，写像を逆にさかのぼることはできない．

周期的分岐

ロジスティック写像の重要な特徴の1つは，周期倍増の過程の末にカオスが出

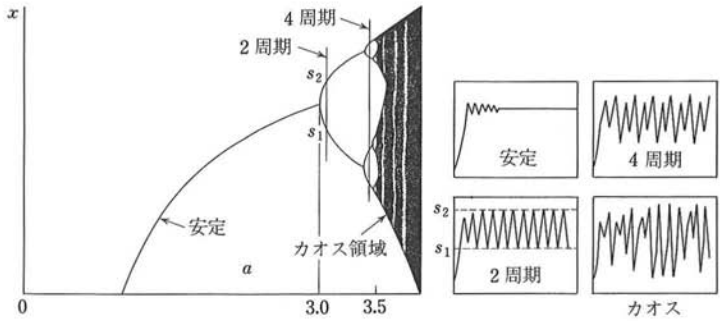


図 21

(Gleick, J., 1987: Chaos: making a new science による)

現することである．周期の倍増はパラメタ a を横軸にとり，少し長い時間がたってから現れる周期的な x_n の値を縦軸にプロットした図で表される（図 21）．この図で a が 1 を超えるとまず $x_n=1-1/a$ が安定な値として現れる．$a=a_0=1$ が 1 周期の分岐である．a が 3 を超えると図 21 のように x_n は 2 つの値 s_1 と s_2 を交互にとる（$x_n=s_1$ ならば $x_{n+1}=s_2$，$x_{n+2}=s_1, \cdots$）．$a=a_1=3$ が分岐点であり，3 を超えると 2 周期（2^1 周期）になる．さらに $a=a_2=1+\sqrt{6}=3.45\cdots$ で 4 周期（2^2 周期）が分岐し，$a=a_3=3.56$ で 8 周期（2^3 周期），$a=a_4=3.5685$ で 16 周期（2^4 周期）が分岐し，こうしてしだいに 2^k 周期が分岐する a_k と，2^{k+1} 周期が分岐する a_{k+1} の間の間隔がしだいに狭くなる．このような分岐を熊手型分岐という．a_k の間隔はしだいに等比級数に近づき，その値は

$$\delta=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k+1}-a_k}=4.6692\cdots \qquad (6)$$

に近づく．これをファイゲンバウム（Feigenbaum）定数という．

【説明】 ロジスティック写像（5）を

$$x_{n+1}=f_a(x_n) \qquad (7)$$

と書くと，写像を続けて 2 回行った結果は

$$x_{n+2}=f_a\{f_a(x_n)\}=f_a{}^2(x_n) \qquad (8)$$

で表すことができる．$a=3.449$ で $f_a{}^2(x_n)$ をプロットすると図 22 のようになり，対角線との交点 s_1 と s_2 が 2 周期の x_n の値になる（s_1 と s_2 間の交点は不安定）．

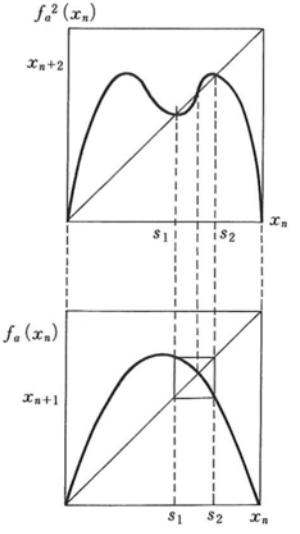


図 22

$f_a^2(x)$ の右半分あるいは左半分は $f_a(x)$ に似ているから，さらに $f_a^4(x)$ も部分的には $f_a(x)$ あるいは $f_a^2(x)$ に似た曲線（図 23）になり，a が 3.449 を超えると 4 周期を与える．以下同様で，このような考察から，ファイゲンバウム定数が説明される．

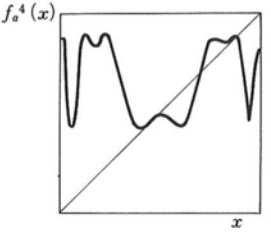


図 23

1 次元写像

x_{n+1} の値が x_n の値のみによって定まる関係

$$x_{n+1}=f(x_n) \qquad (9)$$

は 1 次元写像と呼ばれる．ロジスティック写像はその 1 つである．x_n と x_{n+1} の間の関係を示す曲線はロジスティック写像では放物線であるが，たとえば**正弦写像**

$$x_{n+1}=A\sin(\pi x_n) \qquad (0<A\leq 1,\ 0\leq x_n\leq 1) \qquad (10)$$

もロジスティック写像と似た熊手型分岐を示し，ファイゲンバウム定数も同じになる．相当広い条件のもとでこのファイゲンバウムの普遍法則が成り立つことが知られている．

しかしテント写像（図 24）

$$x_{n+1}=A(1-|2x-1|)$$

$$(0<A\leq 1,\ 0\leq x\leq 1) \qquad (11)$$

では A を大きくしていっても熊手型分

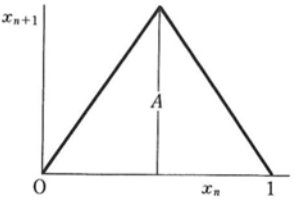


図 24

岐は起こらず，$A<1/2$ のときは $x_n=0$ が安定点であるが，$A=1/2$ で安定点は突然 $x_n=0.5$ に移る．$A>1/2$ で x_n の変化はカオスになり，A を増すにつれて x_n のカオス領域は広がって，$A=1$ では全領域がカオスになる．

$A=1$ のときの写像ではごく特別の初期値でない限り，x_n の値は 0 と 1 の間を不規則にとり，この区間で一様に分布する．この事情はパイこね変換と呼ばれる変換

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n & (0\leq x_n\leq 0.5)\\ 2x_n-1 & (0.5<x_n\leq 1)\end{cases} \tag{12}$$

でも同様である．この変換はパン屋の変換，ベルヌーイシフト，2進変換とも呼ばれる．図25はこの写像を示したものである．

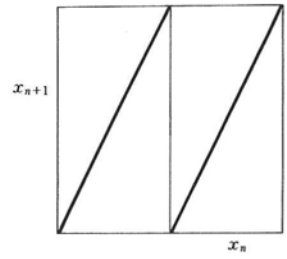


図 25

なお $a=4$ のときのロジスティック写像

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n) \tag{13}$$

はカオスを示すが，ここで

$$x_n=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\theta_n\right) \tag{14}$$

とおくと，$1-x_n=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\theta_n\right)$ なので $a=4$ のロジスティック写像 (13) は

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\theta_{n+1}\right)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\theta_n\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\theta_n\right)=\sin^2(\pi\theta_n) \tag{15}$$

となる．これは写像

$$\theta_{n+1}=2\theta_n \tag{16}$$

を与える．この写像も特別な初期値を除けばカオスになる．そこで $0<\theta_n<1$ とし，θ_{n+1} が1を超えるときは1をひいた値を採用するものとすれば (16) はパイこね変換（図25）と実質的に同じである．そして (16) は $0\leq\theta_n\leq 1$ の間で一様に分布することが示されるが，x_n は (14) によって θ_n と結ばれるので，ロジスティック写像 (13) のカオスは一様な分布でないことを意味する．

Tea Time

不連続時間

連続的自然観と不連続自然観とは科学が始まって以来の2つの大きな流れである．不連続自然観によれば自然はそれ以上分割できない原子から成る．しかし現在では原子も電子も波動であるという連続観も是認される．2つの自然観は二者択一をせまるようなものではないともいえる．

しかし，不連続の間隔を十分狭くした極限が連続であるという見方はあちこちで破綻をきたしているようである．われわれの意識だって連続的であるという証拠はない．思い出す，思いつくなど，思考に関していえばむしろ不連続であることが本質であるらしい．

ロジスティック写像は不連続な，飛び飛びの写像であり，これとまぎらわしい名前のロジスティック方程式は連続な変化の方程式である．本文にも書いてあるが，ロジスティック方程式を $N=N(t)$ に対して

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N(1-N) \qquad (1)$$

と書き，時間 t を $t=n\tau$（n＝整数）として「すなおに」不連続化すると

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{\tau}=\alpha N_n(1-N_n) \qquad (2)$$

となるから，さらに

$$x_n=\alpha\tau N_n/a, \qquad a=\alpha\tau+1$$

とおけばロジスティック写像の式

$$x_{n+1}=ax_n(1-x_n) \qquad (3)$$

となる．この意味でロジスティック写像（3）はロジスティック方程式（1）と対比される．

しかし，α がどのような値（$\alpha>0$）でも $N=N(t)$ はなめらかな曲線（ロジスティック曲線）になるのに対し，ロジスティック写像（3）あるいは（2）はパラメタ a が2を超えると x_n あるいは N_n の変化はなめらかでなくなり，a がさらに増加するとついにはカオス的な変化をするようになる．

このように時間を不連続にすると現象がまったく異なる様相を呈する．生物は1年に1回増殖するものが多いから，その個体数の変化はロジスティック方程式（1）よりも時間を不連続にしたロジスティック方程式（2）あるいは（3）で

記述されるとしたほうがよいかもしれない．そうだとすると条件しだいでは生態系の個体数の変化はカオス的になることも考えられるだろう．

このように考えると，時間を連続にしたロトカ-ヴォルテラ方程式（第3講参照）の適用範囲も再考しなければならないと思われる．生態系はさらに複雑なのである．

第 6 講

簡単な波動方程式

—テーマ—

- ◆ 波動方程式
- ◆ バーガーズ方程式
- ◆ Tea Time: レイリー卿

波動方程式

音の波，光の波などの波動を表す一番簡単な方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_0{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (c_0=\text{定数}) \tag{1}$$

であり，これは波動方程式と呼ばれている．ただし波は x 方向に伝わるとしている．t は時間を表し，定数 c_0 は波の伝わる速さである．上式は因数分解できて

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \tag{2}$$

あるいは

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \tag{2'}$$

と書ける．これからもわかるように，（1）の解は一般に

$$u=f(x-c_0t)+g(x+c_0t) \tag{3}$$

で与えられる．ここで f，g は任意関数で $f(x-c_0t)$ は x の正の向きに，$g(x+c_0t)$ は負の向きに伝わる．（3）を（1）に対するダランベール (d'Alembert)

の解という．

（2）からわかるように

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \qquad (4)$$

はxの正の向きに伝わる（1）の解を与える．簡単のため微係数を表すのに添え字を用い

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

などと書こう．こうすると（4）は

$$u_t+c_0u_x=0 \qquad (4')$$

となる．この式の解は$f(x-c_0t)$で与えられ，これはxの正の向きに，変形しないで伝わる波を表す．とくに正弦波をとれば波長をλ，振動数をνとして

$$\begin{gathered} u=a\sin(kx-\omega t) \qquad (a=\text{定数}) \\ k=\frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega=2\pi\nu, \qquad \frac{\omega}{k}=c_0\ (\text{一定}) \end{gathered} \qquad (5)$$

と書ける．この場合のように波の速度が波数kによらない波を非分散性の波という．

なお，ある方程式において$u_1=u_1(x,t)$および$u_2=u_2(x,t)$が解であるとき，線形の重ね合わせ$u=u_1+u_2$も解ならば，この方程式は線形であるといい，この事柄を重ね合わせの原理という．（1）や（4）は線形方程式である．

【分散性】 $u_{xxx}=\partial^3u/\partial x^3$を（4）に加えた方程式

$$u_t+c_0u_x+\alpha u_{xxx}=0 \qquad (6)$$

を考えよう．これも線形方程式である．しかし波の速度は波長によって異なる．これをみるために

$$u=a\sin(kx-\omega t) \qquad (7)$$

とおくと，これを（6）に代入して

$$c\equiv\frac{\omega}{k}=c_0-\alpha k^2 \qquad (8)$$

を得る．波の速度cは波数kによって異なるのである．このような性質を分散性という．波が分散性をもつとき波を伝えるものを分散性媒質という．

波が種々の波数の波（成分波）の重ね合わせであるとき，分散性の波の場合，各成分波は違った速度で伝わるので，初めまとまった形の波（波束）であっても時間がたつと一般に波はくずれてしまう．しかし分散性が弱ければ，波束はしばらくの間

$$c_g=\frac{d\omega}{dk} \tag{9}$$

で伝わるようにみえることが示される．これを群速度という．$\omega=\omega(k)$ は分散関係と呼ばれる．

非線形波動

線形の波動方程式（4）に非線形項 uu_x を加えた方程式

$$u_t+c_0u_x+\beta uu_x=0 \tag{10}$$

を考えよう．これは非線形方程式であるから，解の重ね合わせはできない．ここで簡単のため $c_0=\beta=1$ とおき，$u+1$ を改めて u とおくと（10）は

$$u_t+uu_x=0 \tag{11}$$

となる．これはおそらく一番簡単な非線形方程式であろう．(11) と (4′) を比べると，波は速度 u をもつようにみえる．実際 (11) は f を任意関数として

$$u=f(x-ut) \tag{12}$$

の形の解をもつことが示される．

【証明】 (12) を t で微分すれば

$$u_t=-f'(x-ut)\,(u+u_tt) \tag{13}$$

また x で微分すれば

$$u_x=f'(x-ut)\,(1-u_xt) \tag{14}$$

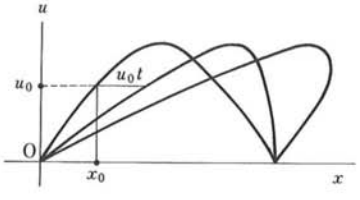


図 26

ここで (14) に u をかけて (13) に加えて整理すると

$$(u_t+uu_x)\{1+tf'(x-ut)\}=0 \tag{15}$$

を得る．したがって $u_t+uu_x=0$ である．∎

波形を表すため u を縦軸にとり，x を横軸にとって u〜t の図をえがいてみよう（図 26）．$t=0$ でこの曲線は $u=f(x)$ である．この曲線上の 1 点を (x_0, u_0) とすると

$$u_0=f(x_0) \tag{16}$$

である．時刻 t においては (12) により

$$u_0=f(x_0+u_0t) \tag{17}$$

したがって点 (x_0, u_0) は点 (x_0+u_0t, u_0) に移る．これからわかるように高さ u のところは速さ u で右へ進み，そのため図のような波は前面が突っ立ってくる．そしてある時間の後に曲線は多価になり，波とはいえない形になってしまう．

バーガーズ方程式

方程式 (11) の右辺に νu_{xx} を加えて得られる方程式

$$\boxed{u_t+uu_x=\nu u_{xx} \qquad (\nu>0)} \tag{18}$$

をバーガーズ (Burgers) 方程式という．これは粘性をもつ流体の方程式であるナビエ-ストークスの方程式の 1 次元の場合と考えることができ，この場合 ν は動的粘性率と呼ばれるものである．(18) の右辺を 0 とおけば (11) になり，波が多価になってしまうが，$\nu>0$ であれば粘性のために波が突っ立って多価になることがなくなる．これは次のような変換で (18) が解けることによって示される．

(18) において

$$u=-2\nu\frac{\partial}{\partial x}\log\phi(x,t) \tag{19}$$

とおくと (18) は線形化されて

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{20}$$

となる．これは $\nu>0$ のとき熱伝導（あるいは拡散）方程式であって一般解が与えられる（この解の性質からバーガーズ方程式は多価になることがないこともわかる）．(19) をコール-ホップ (Cole-Hopf) 変換という．

【証明】 (18) は

$$u_t+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2=\nu u_{xx} \tag{21}$$

と書けるので x で積分すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\int^x u\,dx+\frac{1}{2}u^2=\nu u_x \tag{22}$$

これに (19) から得られる式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int^x u\,dx=-2\nu\frac{\partial}{\partial t}\log\phi=-2\nu\frac{\phi_t}{\phi}\\&u=-2\nu\frac{\phi_x}{\phi},\qquad u_x=-2\nu\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}-\frac{{\phi_x}^2}{\phi^2}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

を代入すれば (20) を得る. ∎

バーガーズ方程式 (18) において，かりに $\nu=0$ とすると方程式 (11) になるが，(18) と (11) とは解の長時間に対する性質がまったく異なることが注目される．(18) において ν を限りなく 0 に近づけても $\nu=0$ にしたものとはまったく異なるということである．

【保存量】 バーガーズ方程式 (18) は

$$\frac{\partial}{\partial t}u=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2-\nu u_x\right) \tag{24}$$

と書ける．無限領域 $(-\infty<x<\infty)$ において u の積分 $\int_{-\infty}^{\infty}u\,dx$ が存在し，遠方で u^2 や u_{xx} が 0 になるならば

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u\,dx=-\left(\frac{1}{2}u^2-\nu u_{xx}\right)\Big]_{-\infty}^{\infty}=0 \tag{25}$$

となるから $\int_{-\infty}^{\infty}u\,dx$ は保存される．すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty}u\,dx=\text{一定}\ (\text{時間によらない}) \tag{26}$$

この性質は $\nu=0$ にした (11) についても成り立つ.

Tea Time

レイリー卿

波動現象の研究は19世紀後半に大いに発達した．波束や群速度などの概念が確立されたのもこの時期であって，これがなかったとしたら今世紀の量子力学の発展も遅れたであろうと思われる．

1834年にスコット・ラッセル（J. Scott Russell. ラッセルといってもいいと思うが，スコット・ラッセルと呼んでいる）は運河の中を進む孤立波を発見し，水槽をつくってこれを研究した．孤立波が流体力学にとって重要な発見であるかどうかということについて当時論争があったということである．ラッセルが船の技術者であったため流体力学者から軽くみられたのかもしれない．ことに流体力学の大御所であったエアリー（Sir G. B. Airy）は，これは単なるラグランジュの浅水波（深さの平方根に比例する速度で進む．$c_0=\sqrt{gh}$）であるとした．これに対しレイリー（Lord Rayleigh）は孤立波が可能であることを計算によって示し（1876年），コルテヴェーグとド・フリースはこれを拡張してKdV方程式（第7講参照）を得ている（1895年）．

レイリー卿はその著 *Theory of Sound*（1877年）でも有名である．この本では有限振幅の音波に現れる非線形効果がたとえば第2巻の250節から数節にわたって考察され，その中にポアソンやリーマンの先駆的な仕事が述べられている．音波の示す高次の効果である音波の圧力の解析（レイリー板）も述べられている．245節には音波によって波の伝播方向に物質が移動する効果もとくに注意されている．つまり，波動が純粋に正弦波的であるということは媒質の運動が完全に周期的であることを意味しない．密度の変化と媒質の速度とは同位相なのでその積は正であって，これは波の伝播方向に物質が移動することを示している．ふつうの波では物質は移動しないがソリトン（第7講参照）では物質の移動がある，といわれることがあるが，これは間違いである．ふつうの波では2次の効果として物質の移動があるが，ソリトンでは1次の効果として物質の移動がある，といったほうが正しい．

レイリーは肖像でみるといくらかたくましい人のように思われるが，若かったときは弱かったのか，ギリシアに保養に行っていて，その間に *Theory of Sound* を書いたといわれている．寺田寅彦さんの随筆に，この本をたずさえて温泉地に

行き，湯に入ってはこれを読み，読んでは湯に入ったと書かれている．本はこのように書き，このように読みたい，などと思ったりする．

レイリーはベナール渦の安定性，すなわちカオスの問題についてもパイオニアであったし，水柱の表面の振動などの研究もあって，後者はボーアが学生だったころの研究の端緒となったものである．

レイリーはアルゴンの発見によってノーベル賞を受けている．これは実験的研究で，レイリーの仕事の広さと深さを思わせる．窒素の原子量が窒素を採集した方法によってわずかに違うことに注目して，窒素の中に未知のガスが含まれていることを突きとめた研究である．アルゴンは空気中に約1%も含まれていたのである．この発見は空気中に含まれる他の不活性気体，ネオン，クリプトンなどの発見につながった．

ファラデー，マクスウェル，ケルビンなどほぼ同時代のイギリスの人たちを比べると，皆すぐれた個性があるが，レイリーにはいぶし銀のような学風があるような気がする．理論と実験の両方をこなすということはほとんど夢のようになってしまったこのごろであるが，これが実現できる科学の分野が復活してくれれば楽しいだろうと期待されるのである．

第 7 講

コルテヴェーグ-ド・フリース方程式

—テーマ—

- ◆ コルテヴェーグ-ド・フリース（KdV）方程式
- ◆ ソリトン解
- ◆ Tea Time: ソリトンの発見

KdV 方程式

1895年にオランダのコルテヴェーグ(D. J. Korteweg)とド・フリース(G. de Vries)によって提出された浅水波の方程式はコルテヴェーグ-ド・フリース方程式（略してKdV方程式）と呼ばれる（同じシリーズの『流体力学30講』参照）.

彼らはこの方程式が孤立波解と周期波解（いわゆるクノイダル波）をもつことを示した. KdV 方程式は簡単な尺度変換により無次元の非線形方程式

$$u_t+uu_x+\mu^2u_{xxx}=0 \tag{1}$$

と書ける（μは定数）.

【孤立波】（1）は

$$u=u_\infty+k^2\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{\sqrt{12\mu}}\{k(x-ct)+\delta\}\right] \tag{2}$$

と表せる解をもつ. sech は1つの山をもつからこの解は孤立波と呼ばれる. た

だし u_∞, k, μ は任意の定数（$k>0$ とする）で，孤立波が伝わる速さ c は

$$c=ku_\infty+\frac{1}{3}k^2 \qquad (2')$$

で与えられる．

【ソリトンの発見】 KdV 方程式はその後ほとんど忘れられていたが，プラズマ・核融合の研究に KdV 方程式に似たものがしばしば現れたことと，計算機の発達によって 1950 年代になって再び脚光を浴びるようになった．

アメリカのザブスキー（N. Zabusky）とクルスカル（M. D. Kruskal）は KdV 方程式を数値的に解いて，その解が孤立波の集まりで表せることを発見した．これらの孤立波は大きさによって速度が異なり，たがいに衝突を繰り返すが，衝突・通過の後はもとの孤立波に戻る．衝突してもアイデンティティを失わないのである．そこで孤立波で粒子のように振舞うという意味でこれらの孤立波をソリトンと名づけた．

ソリトンは波の分散性と非線形性とがバランスして形成される孤立波である．KdV のソリトンと似た孤立波はその後多くの非線形波動について発見され，すべてソリトンと総称されるようになった．区別するときは KdV ソリトンなどという．

KdV 方程式は厳密に解ける．しかし前講で述べたバーガーズ方程式に対するコールーホップ変換のように簡単な変換で解くことはできない．その解法はいくつかあるので，他の非線形発展方程式の解法と関係づけさせたりしながら，やや詳しく述べていくことにしよう．

ソリトン解

KdV 方程式はまた適当な尺度変換により

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \qquad (3)$$

と書くことができる．これに対する孤立波解（ソリトン）は波の強さを表す任意定数 k と任意の位相定数 δ を用いて

$$u=2k^2\,\mathrm{sech}^2(kx-4k^3t+\delta) \tag{4}$$

と表せる．これが（2）に比べて簡単な係数をもつことに注意し，これからはKdV方程式として（3）を用いることにする．孤立波は高いほど（kが大きいほど）速く伝わる（速度$4k^2$）．

ソリトン解（4）はすぐわかるように

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\cosh\,(kx-4k^3t+\delta) \tag{5}$$

あるいは

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\{1+e^{2(kx-4k^3t+\delta)}\} \tag{5'}$$

あるいは

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\{1+e^{-2(kx-4k^3t+\delta)}\} \tag{5''}$$

と書ける．これらが同じく（4）を与えるのは

$$\cosh\,(kx-4k^3t+\delta)=\frac{1}{2}e^{-(kx-4k^3t+\delta)}\{1+e^{2(kx-4k^3t+\delta)}\}$$

$$=\frac{1}{2}e^{kx-4k^3t+\delta}\{1+e^{-2(kx-4k^3t+\delta)}\} \tag{6}$$

と書き直せるが，この対数をとったとき（6）の第2，3式の初めの因子は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\left\{\frac{1}{2}e^{\mp(kx-4k^3t+\delta)}\right\}=0 \tag{7}$$

となって寄与を与えないからである．

【2ソリトン解】　2個のソリトンをもつ解を求めるため

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\phi(x,t) \tag{8}$$

とし，（5）を参照して

$$\boxed{\psi(x,t)=1+a_1e^{-2\eta_1}+a_2e^{-2\eta_2}+a_3e^{-2(\eta_1+\eta_2)}} \tag{9}$$

ここで

$$\boxed{\begin{aligned}\eta_1&=k_1x-\beta_1t+\delta_1\\ \eta_2&=k_2x-\beta_2t+\delta_2\end{aligned}} \tag{9'}$$

とおいて（8）に代入し，さらにこれを（3）に代入すると（3）が満足されるのは

$$\begin{aligned}a_3&=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2a_1a_2\\ \beta_1&=4k_1^3,\qquad \beta_2=4k_2^3\end{aligned} \tag{9''}$$

であるときであることがわかる．（9）はKdV方程式（3）の2ソリトン解を与える．（9）においてδ_1,δ_2およびa_1,a_2は任意にとってよい．

（9）において$a_2=a_3=0$とおくと1個のソリトンの解（4）が再現される．

【特別な2ソリトン解】　とくに

$$\begin{aligned}k_1=1,\qquad k_2=2,\qquad a_1=a_2=3\\ \delta_1=\delta_2=0\end{aligned} \tag{10}$$

とおくと（9″）により

$$\beta_1=4,\qquad \beta_2=32,\qquad a_3=1 \tag{11}$$

となる．このとき（8）は

$$u(x,t)=12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{\{3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)\}^2} \tag{12}$$

となる．

$t=0$においては（12）は2個のソリトンが合体し

$$u(x,0)=6\,\mathrm{sech}^2x \tag{13}$$

を与える．また（12）は$t\to\mp\infty$の極限において2つのソリトンに分かれることが示される．このとき

$$t\to-\infty:\ u=2\,\mathrm{sech}^2(x-4t-\varphi)+8\,\mathrm{sech}^2\,2\left(x-16t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$t \to +\infty : u = 2\,\mathrm{sech}^2(x-4t+\varphi) + 8\,\mathrm{sech}^2 2\left(x-16t-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{14}$$

ただし，$e^{\varphi}=\sqrt{3}$

となる．この衝突を図27に示す．

行列式解

ソリトン解は（9）の形以外にいろいろの形に書ける．ここで述べる行列式の形の解や後に述べるロンスキアンの形の解などである．まず a_1, a_2 は任意であるから

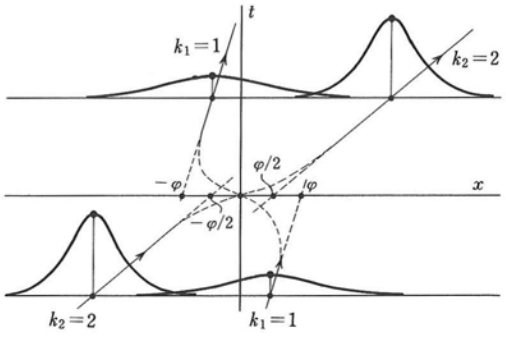


図 27

$$a_1=\frac{1}{2k_1}, \qquad a_2=\frac{1}{2k_2} \tag{15}$$

とおくと（9）は行列式（det）の形

$$\phi(x,t)=\det A(x,t)$$

$$A(x,t)=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{2k_1}e^{-2\eta_1} & \dfrac{1}{k_1+k_2}e^{-(\eta_1+\eta_2)} \\ \dfrac{1}{k_2+k_1}e^{-(\eta_2+\eta_1)} & 1+\dfrac{1}{2k_2}e^{-2\eta_2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

となる．

(16) は2ソリトン解であるが，N個のソリトンをもつKdV方程式（3）の解も

$$\boxed{\begin{aligned} u&=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\phi(x,t) \\ \phi(x,t)&=\det A(x,t) \end{aligned}} \tag{17}$$

で与えられることが示される（第9講参照）．ここで $A(x,t)$ は $N\times N$ 行列でそ

の成分は（k_i は任意定数）

$$\boxed{\begin{aligned} A_{ij}&=\delta_{ij}+\frac{1}{k_i+k_j}e^{-(\eta_i+\eta_j)} \\ \eta_i&=k_ix-\beta_it+\delta_i \\ \beta_i&=4k_i^3 \qquad (i,j=1,2,\cdots,N) \end{aligned}} \tag{18}$$

である．また $\delta_{ij}=1(i=j)$，$\delta_{ij}=0(i\neq j)$ はクロネッカーの δ 関数である．

ロンスキアン解

2ソリトン解は

$$\boxed{u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log W_r(f_1,f_2)} \tag{19}$$

と書くこともできる．ここで $W_r(f_1,f_2)$ はロンスキアン

$$W_r(f_1,f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & \partial f_1/\partial x \\ f_2 & \partial f_2/\partial x \end{vmatrix} \tag{20}$$

であり

$$f_i=\cosh\eta_i, \qquad \eta_i=k_ix-4k_i^3t+\delta_i \qquad (i=1,2) \tag{21}$$

である．

【証明】 書き直していくと

$$\begin{aligned} W_r(f_1,f_2)&=\begin{vmatrix} \cosh\eta_1 & k_1\sinh\eta_1 \\ \cosh\eta_2 & k_2\sinh\eta_2 \end{vmatrix} \\ &=\frac{k_2}{4}(e^{\eta_2}-e^{-\eta_2})(e^{\eta_1}+e^{-\eta_1})-\frac{k_1}{4}(e^{\eta_1}-e^{-\eta_1})(e^{\eta_2}+e^{-\eta_2}) \\ &=\frac{1}{4}e^{\eta_1+\eta_2}\{-(k_1-k_2)+(k_1+k_2)(e^{-2\eta_1}-e^{-2\eta_2}) \\ &\qquad +(k_1-k_2)e^{-2(\eta_1+\eta_2)}\} \end{aligned} \tag{22}$$

となる．ここで任意定数であった δ_1, δ_2 を複素数とし，さらに δ_1, δ_2 の一部を改めて δ_1, δ_2 と書き直すことにして

$$e^{-\eta_1} \text{ を } -i\sqrt{\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}}e^{-\eta_1}, \qquad e^{-\eta_2} \text{ を } \sqrt{\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}}e^{-\eta_2} \tag{23}$$

と改める．するとロンスキアンは

$$W_r(f_1, f_2) = -\frac{i}{4}(k_1+k_2)e^{\eta_1+\eta_2}\left\{1+e^{-2\eta_1}+e^{-2\eta_2}+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 e^{-2(\eta_1+\eta_2)}\right\} \tag{24}$$

となる．(24) において (19) に寄与するのは {…} だけであり，これは (9) で $a_1=a_2=1$ とおいたものと一致している．したがって (20) はこの場合の2ソリトン解を与える．

Nソリトン解はN次のロンスキアン W_r を用いて

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log W_r(f_1, f_2, \cdots, f_N)$$

$$W_r(f_1, f_2, \cdots, f_N)=\begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(1)} & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ f_2 & f_2^{(1)} & \cdots & f_2^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_N & f_N^{(1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \tag{25}$$

で与えられることが示される．ただし $f_i^{(s)}=\partial^s f_i/\partial x^s$ であり，また f_i は

$$\partial f_i/\partial t=-4\,\partial^3 f_i/\partial x^3 \tag{26}$$

を満たすものとする．

Tea Time

ソリトンの発見

非線形波動の研究にはいくつかの源流があり，それが集まって大きな流れになったのが現在の状況である．その源流の1つに1950年代になされたフェルミ-パスターウラム (E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam) の研究がある．フェルミは当時発達し始めていた電子計算機の計算能力を利用して解答が得られそうないくつかの問題と取り組んだが，その1つはエルゴード問題であった．彼は若いときにこの問題を数理的に考えたことがあった．相互作用をする多粒子系に適用される統計力学ではエルゴード性を仮定するのが普通である．多粒子系として一番簡単な線形格子の振動は独立な規準振動（ノーマルモード）の重ね合わせであるからエルゴード的でない．そこで粒子間の相互作用に非線形項を加えればモード間のエネル

ギーの流れが可能になり，体系はエルゴード的になることが期待される．

そこでフェルミらはいくつかの型の非線形相互作用をためした．粒子間の距離の変化の2乗に比例する項（線形相互作用）に3次に比例する項や4次に比例する項などを付け加えた1次元格子である．これらの非線形格子について得られた結果は似たようなものであった．非線形項のために線形モード間にエネルギーの遷移が起こる．ここまでは予想したとおりであったが，エネルギーの遷移はいくつかの少数のモード間で著しいだけで，他のモードへは移っていかない．そしてある時間がたった後に格子の状態は出発時とほとんど同じになってしまう．これをフェルミーパスターウラムの再帰現象という．

ザブスキーはこの再帰現象を連続体近似で考察した．3次非線形項をもつ格子は浅水波を扱った流体力学のブシネ（Boussinesq）方程式で近似でき，さらにこれはKdV方程式で近似される．そこで彼はクルスカルといっしょに電子計算機でKdV方程式を調べ，1965年にKdV方程式のソリトンを発見したのである．

数値計算でKdV方程式が簡単な解をもつことが明らかにされると，これを解析的に解く努力が集中的になされ，1967年にプリンストンのグループだったガードナー（C. S. Gardner），グリーン（J. M. Greene），クルスカル，ミウラ（R. Miura）によってKdV方程式の解析的方法が発見された．いわゆるKdV方程式に対する逆散乱法である．これは非線形発展方程式を解析的に解く方法の最初のものであるといってよい．この発見を契機として多くの方程式の解法が続続と発見された．他方でこの解法の発見を最後にプリンストンのこの人たちのグループは解散してしまったようである．若い研究者は就職のためプリンストンを去らなければならなかったのだろう．ミウラは日系3世（3世半？）であるが，今はカナダのバンクーバーにいて応用数学の雑誌の代表者もしている．

このごろはテレビに「ソリトン」という番組がある．ソリトンも流行語になったらしい．若い人向けの番組らしく，ソリトンを独立したエネルギーの塊というふうに解釈しているらしい．新聞に「素粒子」という欄もある．科学用語が日常語的になるのはいいことだろうか．

第8講

ラックス形式

—テーマ—

- ◆ KdV 方程式に対するラックス形式
- ◆ KdV 方程式に付随するシュレーディンガー方程式
- ◆ Tea Time: マーチン・クルスカル

KdV 方程式に対するラックス形式

次の式で表される演算子（作用素）

$$L=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{u}(x,t)$$
$$B=-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6\hat{u}\frac{\partial}{\partial x}+3\hat{u}_x \qquad (1)$$

を用いれば方程式

$$L_t=BL-LB \qquad (2)$$

（ラックス（Lax）形式という）は KdV 方程式

$$\hat{u}_t-6\hat{u}\hat{u}_x+\hat{u}_{xxx}=0 \qquad (3)$$

を与える（KdV 方程式 $u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$ において $\hat{u}=-u$ とおけば（3）にな

る．符号の違いを表すため記号 $\hat{u}$ を用いた)．

【証明】 作用素は関数 φ に作用すると考えると

$$\begin{aligned} L_t\varphi &= \frac{\partial}{\partial t}(L\varphi) - L\varphi_t \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\hat{u}\varphi) - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{u}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ &= \hat{u}_t\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

また

$$\begin{aligned} BL\varphi &= \left(-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6\hat{u}\frac{\partial}{\partial x}+3\hat{u}_x\right)\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{u}\right)\varphi \\ &= 4\frac{\partial^5\varphi}{\partial x^5} - 4\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\hat{u}\varphi) - 6\hat{u}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + 6\hat{u}\frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}\varphi) \\ &\quad -3\hat{u}_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 3\hat{u}_x\hat{u}\varphi \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} LB\varphi &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{u}\right)\left(-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6\hat{u}\frac{\partial}{\partial x}+3\hat{u}_x\right)\varphi \\ &= 4\frac{\partial^5\varphi}{\partial x^5} - 6\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\hat{u}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{u}_x\varphi) \\ &\quad -4\hat{u}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + 6\hat{u}^2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 3\hat{u}\hat{u}_x\varphi \end{aligned} \tag{5'}$$

したがって

$$\begin{aligned} (BL-LB)\varphi &= -4\left\{\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\hat{u}\varphi) - \hat{u}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right\} - 6\left\{\hat{u}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\hat{u}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\} \\ &\quad +6\left\{\hat{u}\frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}\varphi) - \hat{u}^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\} - 3\left\{\hat{u}_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{u}_x\varphi)\right\} \\ &= -4\left(\frac{\partial^3\hat{u}}{\partial x^3}\varphi + 3\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 3\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) \\ &\quad +6\left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) + 6\hat{u}\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\varphi \\ &\quad +3\left(\frac{\partial^2\hat{u}_x}{\partial x^2}\varphi + 2\frac{\partial\hat{u}_x}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \\ &= (-\hat{u}_{xxx} + 6\hat{u}\hat{u}_x)\varphi \end{aligned} \tag{6}$$

したがってラックス形式（2）は KdV 方程式（3）を与える． ∎

KdV 方程式に付随するシュレーディンガー方程式

(1) の演算子 L に対する固有値方程式

$$L\varphi=\lambda\varphi \tag{7}$$

は

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\hat{u}\varphi=\lambda\varphi \tag{8}$$

と書ける．これは量子力学におけるシュレーディンガー方程式と同じ形をしているので，KdV 方程式に付随するシュレーディンガー方程式と呼ばれている．

【例：ソリトン】 KdV 方程式 (3) に対するソリトン解は

$$\hat{u}=-2k^2\,\mathrm{sech}^2\,(kx-4k^3t-\delta) \tag{9}$$

で与えられる．これは深さ $2k^2$ の谷の形をしている (図 28).

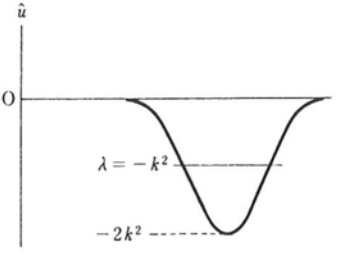


図 28

(9) に対するシュレーディンガー方程式 (8) は

$$\varphi=\zeta(x,y)=\frac{c(t)e^{-kx}}{1+\dfrac{c(t)^2}{2k}e^{-2kx}},\qquad \lambda=-k^2$$

あるいは

$$\zeta(x,t)=\sqrt{\frac{k}{2}}\,\mathrm{sech}\,(kx-4k^3t-\delta) \tag{10}$$

で与えられる． (10′)

これは遠方 $x\to\pm\infty$ で急激に 0 になる解で，シュレーディンガー方程式 (8) としては谷形の束縛ポテンシャル (9) による束縛状態である．束縛状態の波動関数であることをはっきり表すため φ をとくに $\zeta(x,t)$ と書いた．(3) のソリトン解はこのような束縛状態をもつ．

一般のラックス形式

KdV 方程式に限らず発展方程式に対してラックス形式が広く考えられる．ある演算子 L の固有値 λ が時間によらないとする．すなわち

$$\boxed{\begin{aligned} L\varphi&=\lambda\varphi \\ \frac{d\lambda}{dt}&=0 \end{aligned}} \tag{11}$$

とし，φ の時間変化が

$$\boxed{\varphi_t=B\varphi} \tag{12}$$

を満足するならば L の時間変化はラックス形式

$$\boxed{L_t=BL-LB} \tag{13}$$

で与えられる．

【証明】 (11) の第1式を t で微分すれば

$$\lambda\varphi_t=L_t\varphi+L\varphi_t \tag{14}$$

ここで (12) と (11) により

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_t=\lambda B\varphi=B\lambda\varphi=BL\varphi \\ L\varphi_t=LB\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

であるから

$$L_t\varphi=(BL-LB)\varphi \tag{16}$$

したがって (13) が得られた．∎

【注意】 前項と逆のこともいえる．すなわち

$$\begin{aligned} L\varphi&=\lambda\varphi \\ \frac{d\lambda}{dt}&=0 \\ L_t\varphi&=(BL-LB)\varphi \end{aligned} \tag{17}$$

が成り立つときは φ の時間変化は

$$\varphi_t=B\varphi \tag{18}$$

に従うとしてよい．

【証明】 前節と同様に

$$\lambda\varphi_t=L_t\varphi+L\varphi_t \tag{19}$$

したがって

$$\lambda\varphi_t - L\varphi_t = L_t\varphi$$
$$= (BL-LB)\varphi = (\lambda B\varphi - LB\varphi) \tag{20}$$

よって

$$L(\varphi_t - B\varphi) = \lambda(\varphi_t - B\varphi) \tag{21}$$

他方で

$$L\varphi = \lambda\varphi \tag{22}$$

も成り立つとしている．L が（1）のように時間微分 $\partial/\partial t$ を陽に含まないならば，(21) と (22) により関係式

$$\varphi_t - B\varphi = C(t)\varphi \tag{23}$$

が得られる．ここで $C(t)$ は x を含まない t だけの関数であるが，φ を改めて $\varphi \exp \int^t C(t)dt$ とすれば $\varphi_t - B\varphi = 0$ (18) が導かれる． ∎

Tea Time

マーチン・クルスカル

ソリトンの発見者のクルスカル（Martin D. Kruskal）にはあちこちで会ったし，お世話にもなった．彼がプリンストンのプラズマ研究所にいたころ訪ねたことがあったが不在で，秘書は夕方にならないと来ないだろうといっていた．2度目にプリンストン大学へ行ったときは数学教室へ移っていたが，私のためにセミナーを用意してくれて，その予告が地方の新聞に載った．これをたまたまみた人で，昔 Cal. Tech.（カリフォルニア工科大学）で知り合ったブラジル2世が連絡してきた．この人は有名な化学者ポーリング（Linus Pauling）の弟子で，ポーリングを尊敬していて自分の子供をライナスと名づけたほどである．そのときは近くの会社に勤めて生化学の研究をしていた．プリンストン大学では相対論で有名なシュヴァルツシルトの息子（といっても相当な年の人だが）にも会った．銀河の模型に関する数値計算をやっていた．クルスカルは私をプラズマ研究所へ案内して協同研究者のガードナーたちとも引き合わせてくれた．ちょうどアインシ

ュタイン100年祭の講演会があったので，いっしょに高級研究所へ行ってウイグナーやディラックの話を聴くこともできた．また自宅で御馳走になり，さらにニューヨーク中心街に大きな部屋をもっていたクルスカルの母堂の家でクルスカルの親類の会でにぎやかな夕食をともにしたこともあった．母堂はオッペンハイマーといって，あの物理学者オッペンハイマーの親戚であり，アメリカ折り紙協会を組織し会長をしておられた．1992年にデンマークの学会でクルスカルに会ったとき，クルスカルは母堂の重体なのを押して学会に出席していたが，学会の遠足のときに昨日母がなくなったと私にささやいた．それからしばらく私たちは最近つれあいを亡くした彼の弟の生活の様子や人生についてやや複雑な話をした覚えがある．クルスカルはしばしば旧ソ連にも招かれていたようであるが，旧ソ連からの帰途に日本に寄って私の研究室に来たときもあった．ソ連の貧しい状況について話しながら町を歩いていたとき，店頭にいっぱい野菜や果物などがあるのをみて，ソ連の人たちの貧しさを思うと涙が出るともいっていた．イタリアのコモ湖の学会で会って湖上の夜をいっしょに楽しんだこともある．このときはフェルミ-パスタ-ウラムの問題で有名なパスタや，J. フォード，フラシュカといった人たちもいっしょだった．クルスカルは相対性理論の研究でも有名で，もともとは数学者である．実数に対する新しい見方（超現実数）について話してくれたこともあり，また数学へ戻りたいといっていたが，物理的な研究から抜け出せないらしい．旅行にはリュックを背負ってくる．そして会議中は携帯用の枕を椅子の背もたれに戴せて頭を休ませ，独特なポーズをしている．寝ていることもあるかもしれないが，突然大きな声で質問をしたりする．1995年に70歳になる．

第 9 講

逆 散 乱 法

—テーマ—

- ◆ 逆散乱法
- ◆ KdV 方程式に対するゲルファント-レビタンの方程式
- ◆ Tea Time: 逆散乱法とは

逆散乱法の要点

前講で述べたように KdV 方程式をはじめとして多くの発展方程式は

$$\begin{aligned} L(t)\varphi(x,t) &= \lambda\varphi(x,t), \qquad \frac{d\lambda}{dt}=0 \\ \varphi_t(x,t) &= B(t)\varphi(x,t) \end{aligned} \tag{1}$$

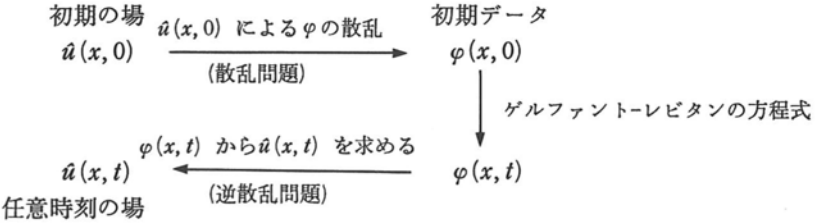
と表すことができる．ここで演算子 L は KdV 方程式の場合 $L=-\partial^2/\partial x^2+\hat{u}(x,t)$ であり，一般に各時刻における波動場の情報を含んでいるので，これを $L(t)$ と書いた．$B(t)$ についても同様である．以下 KdV 方程式を考える．

$t=0$ における L を $L(0)$ とすると

$$\begin{aligned} L(0)\varphi(x,0) &= \lambda\varphi(x,0) \\ \varphi_t(x,0) &= B(0)\varphi(x,0) \end{aligned} \tag{2}$$

である．初期値 $\hat{u}(x,0)$ を与えると（2）を解いて初期の $\varphi(x,0)$ が定まる（この過程を散乱問題という）が，初期値 $\varphi(x,0)$ から得られるできるだけ少数のデータ（初期データ）をもとにして任意時刻の波動場 $\hat{u}(x,t)$ を求めることが要求

される．そのためまず初期データを用いて任意時刻の $\varphi(x,t)$（波動関数ということがある）を構成し，これを使って（1）から $L(t)$，したがって $\hat{u}(x,t)$ を求める（この過程が逆散乱問題である）．図式的にえがけば



ゲルファント-レビタンの方程式

初期データから任意時刻の波動場 $\hat{u}(x,t)$ を導くにはゲルファント-レビタン (Gel'fand-Levitan) の方程式という線形の積分方程式が用いられる（ゲルファント-レビタン-マルチェンコ (Marchenko) の方程式ということもある）．

多くのテキストでは散乱の式（1）からゲルファント-レビタンの方程式を導いているが，本書ではゲルファント-レビタンの方程式から（1）を導くことにより，この方程式の解が波動場 $\hat{u}(x,t)$ を与えることを示そうと思う．

KdV 方程式に対するゲルファント-レビタンの方程式は

$$K(x,y,t)+F(x+y,t)+\int_x^\infty K(x,z,t)\,F(z+y,t)\,dz=0 \qquad (3)$$

と書ける．ソリトンで表される運動だけに限れば，N 個のソリトンを特徴づけるパラメタを $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_N$ として積分方程式（3）の核 $F(x+y,t)$ は（$c_j(t)$ は t だけの関数）

$$F(x+y,t)=\sum c_j(t)^2 e^{-\kappa_j(x+y)} \qquad (\kappa_j>0) \qquad (4)$$

である（ソリトン以外の運動があるときは（4）の右辺にそのための項が付け加わる）．

ここで（3）を $K(x,y,t)$ について解くため

$$K(x,y,t)=-\sum_{j=1}^{N}c_j(t)\,\zeta_j(x,t)\,e^{-\kappa_j y} \tag{5}$$

とおくと（3）は

$$\sum_{j=1}^{N}c_j(t)\,e^{-\kappa_j y}\Big\{-\zeta_j(x,t)+c_j(t)\,e^{-\kappa_j x} -\sum_{k=1}^{N}\frac{c_j(t)\,c_k(t)}{\kappa_j+\kappa_k}\zeta_k(x,t)\,e^{-(\kappa_j+\kappa_k)x}\Big\}=0 \tag{6}$$

となる．ここでyは任意であるから上式は

$$\zeta_j(x,t)+\sum_{k=1}^{N}\frac{c_j(t)\,c_k(t)}{\kappa_j+\kappa_k}\zeta_k(x,t)\,e^{-(\kappa_j+\kappa_k)x}=c_j(t)e^{-\kappa_j x} \tag{7}$$

を与える．これがこの場合のゲルファント-レビタンの方程式である．

束縛状態の波動関数

KdV 方程式を考えているので

$$L=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{u}(x,t) \tag{8}$$

とし，さらに

$$\hat{u}(x,t)=2\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\sum_{j=1}^{N}c_j(t)\,\zeta_j(x,t)\,e^{-\kappa_j x}\Big\} \tag{9}$$

とおくと，（7）の$\zeta_j(x,t)$は

$$L\zeta_j(x,t)=-\kappa_j{}^2\zeta_j(x,t) \tag{10}$$

を満たすことが示される．(10) は量子力学のシュレーディンガー方程式と同形であり，右辺の$-\kappa_j{}^2$は固有値であって，(10) はこの固有値が負であること，したがって$\zeta_j(x,t)$は束縛状態を表す波動関数であることを示している（証明は略すが，（9）の$\hat{u}(x,t)$は負のポテンシャルであることが示される：$\hat{u}(x,t)<0$）．

【証明】（7）をxについて微分すると

$$\frac{\partial^2\zeta_j}{\partial x^2}+\sum_k c_jc_k(\kappa_j+\kappa_k)e^{-(\kappa_j+\kappa_k)x}\zeta_k-2\sum_k c_jc_ke^{-(\kappa_j+\kappa_k)x}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}$$

$$+\sum_k\frac{c_jc_k}{\kappa_j+\kappa_k}e^{-(\kappa_j+\kappa_k)x}\frac{\partial^2\zeta_k}{\partial x^2}-\kappa_j^2c_je^{-\kappa_jx}=0 \tag{11}$$

を得る．(11) を (8) に入れて (9) を用いると少し長い計算の結果

$$(L+\kappa_j^2)\zeta_j+\sum_k\frac{c_jc_k}{\kappa_j+\kappa_k}e^{-(\kappa_j+\kappa_k)x}(L+\kappa_k^2)\zeta_k=0 \tag{12}$$

が得られる．ここで行列 $A=(A_{jk})$ を

$$A_{jk}=\delta_{jk}+\frac{c_jc_k}{\kappa_j+\kappa_k}e^{-(\kappa_j+\kappa_k)x} \tag{13}$$

とおけば (12) は

$$\sum_k A_{jk}(L+\kappa_k^2)\zeta_k=0 \tag{14}$$

となる．行列 A は逆行列 A^{-1} をもつので，これを (14) の左からかければ

$$(L+\kappa_k^2)\zeta_k=0$$

すなわち (10) が得られる．

波動関数

次に $C(t)$ を t の関数，$i=\sqrt{-1}$ として

$$\boxed{\varphi(x,t)=C(t)\left\{1-\sum\frac{c_j(t)\zeta_j(x,t)}{i\sqrt{\lambda}+\kappa_j}e^{-\kappa_jx}\right\}e^{-i\sqrt{\lambda}x}} \tag{15}$$

とおけば（1）の第1式

$$\boxed{L\varphi(x,t)=\lambda\varphi(x,t)} \tag{16}$$

が導かれる．

【証明】 計算は長いが直接 (15) を微分して (18)，（9）から

$$(L-\lambda)\varphi=C(t)\left\{\sum_{j=1}^N\frac{c_j}{i\sqrt{\lambda}+\kappa_j}(L+\kappa_j^2)\zeta_j\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^N c_j\zeta_je^{-\kappa_jx}\right)-\hat{u}(x,t)\right\}e^{-ikx} \tag{17}$$

を得るが，この式の右辺第1項は (10) により0であり，第2項と第3項は（9）

によって打ち消し合う．したがって (16) を得る．

逆散乱法の適用

ここで（9）において未定のまま残した係数 $c_j(t)$ を

$$c_j(t)=c_j(0)\,e^{4\kappa_j^3 t} \tag{18}$$

とする．ただしここで $c_j(0)$ は $t=0$ における $c_j(t)$ の値である．このとき B を作用素

$$B=-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6\hat{u}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+3\hat{u}_x(x,t) \tag{19}$$

として ζ_j の時間変化は

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta_j(x,t)=B\zeta_j(x,t) \tag{20}$$

を満たすことが，(10) の証明と同様にして示される（証明は略す）．

さらに (15) 右辺の因子 $C(t)$ を

$$C(t)=e^{4ik^3 t}\qquad(\lambda=k^2) \tag{21}$$

とおくと，(20) を用いて波動関数 (15) の時間変化 φ_t は

$$\varphi_t(x,t)=B\varphi(x,t) \tag{22}$$

で与えられることが示される（これも証明は略す）．

これによってゲルファント-レビタンの方程式（7）から KdV 方程式をラックス形式の作用素対 L と B を用いて表した式

$$L\varphi=\lambda\varphi,\qquad \varphi_t=B\varphi \tag{23}$$

が導かれた．ソリトン運動に限れば，KdV 方程式はゲルファント-レビタンの方程式（7）と同等なのである．

逆散乱法を適用するには，まず $t=0$ における $\hat{u}(x,0)$ を用いて $L(0)\zeta_j(x,0)=-\kappa_j^2\zeta_j(x,0)$，すなわち

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{u}(x,0)\right\}\zeta_j(x,0)=-\kappa_j^2\zeta_j(x,0) \tag{24}$$

を解き，固有値 $\kappa_j^2 (j=1,2,\cdots,N)$ と束縛状態の固有関数 $\zeta_j(x,0)$ を求める．次に初期値 $\hat{u}(x,0)$ を

$$\hat{u}(x,0) = 2\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{N} c_j(0)\zeta_j(x,0)e^{-\kappa_j x} \tag{25}$$

という形で表し，係数 $c_j(0)$ $(j=1,2,\cdots,N)$ を求めればよい．

なお，$c_j(t)$ の時間依存性は $x\to+\infty$ における $\zeta_j(x,t)$ の振舞いからも知ることができる．束縛状態の波動関数は $x\to+\infty$ で $\zeta_j\sim e^{-\kappa_j x}$ のように減少するので，(7) において第2項は第1項に比べ急激に減少する．したがって $x\to+\infty$ において (7) から

$$\zeta_j(x,t)\to c_j(t)e^{-\kappa_j x} \qquad (x\to+\infty) \tag{26}$$

また $x\to+\infty$ において $\hat{u}(x,t)$，$u_x(x,t)$ も急激に 0 になるから

$$B(t)\to -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} \qquad (x\to+\infty) \tag{27}$$

としてよい．したがって (20) は $x\to+\infty$ における振舞いから

$$\frac{dc_j(t)}{dt} = 4\kappa_j^3 c_j(t) \tag{28}$$

を与える．ゆえに

$$c_j(t) = c_j(0)e^{4\kappa_j^3 t} \tag{29}$$

が示された．

N ソリトン解

(7) は $\zeta_j(x,t)$ について線形の連立方程式であるから，クラメル (Cramer) の方法で解ける．その結果は

$$\zeta_j = \frac{\det A^{(j)}}{\det A} \tag{30}$$

と書ける．ここで A は (13) で与えられる行列であり，$A^{(j)}$ は $A=(A_{jk})$ の j 列を (7) の右辺の $[c_1e^{-\kappa_1 x}, c_2e^{-\kappa_2 x}, \cdots, c_Ne^{-\kappa_N x}]$ を転置したもので置き換えた行列である．すなわち

$$\det A^{(j)}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots & A_{1\,j-1} & c_1e^{-\kappa_1 x} & A_{1\,j+1}\cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22}\cdots & A_{2\,j-1} & c_2e^{-\kappa_2 x} & A_{2\,j+1}\cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2}\cdots & A_{N\,j-1} & c_Ne^{-\kappa_N x} & A_{N\,j+1}\cdots & A_{NN} \end{vmatrix} \tag{31}$$

したがって，また

$$\begin{aligned} c_je^{-\kappa_j x}\det A^{(j)} &= \begin{vmatrix} A_{11}\cdots & c_jc_1e^{-(\kappa_1+\kappa_j)x}\cdots & A_{1N} \\ A_{21}\cdots & c_jc_2e^{-(\kappa_2+\kappa_j)x}\cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1}\cdots & c_jc_Ne^{-(\kappa_N+\kappa_j)x}\cdots & A_{NN} \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} A_{11}\cdots & \dfrac{\partial}{\partial x}A_{1j}\cdots & A_{1N} \\ A_{21}\cdots & \dfrac{\partial}{\partial x}A_{2j}\cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1}\cdots & \dfrac{\partial}{\partial x}A_{Nj}\cdots & A_{NN} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{32}$$

ゆえに

$$\sum_j c_je^{-\kappa_j x}\zeta_j=-\frac{1}{\det A}\,\frac{\partial}{\partial x}\det A \tag{33}$$

よって（9）は

$$\boxed{\begin{gathered} \hat{u}(x,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\phi \\ \phi=\det A \end{gathered}} \tag{34}$$

と書ける．

【ソリトン解】 1個のソリトン（$N=1$）の場合

$$\det A=1+\frac{c^2}{2\kappa}e^{-2\kappa x} \tag{35}$$

であり

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{-8\kappa^2}{\left(\dfrac{\sqrt{2\kappa}}{c}e^{\kappa x}+\dfrac{c}{\sqrt{2\kappa}}e^{-\kappa x}\right)^2} \\ &= -2\kappa^2\,\mathrm{sech}^2(\kappa x-4\kappa^3t-\delta) \end{aligned} \tag{36}$$

を得る（$c(0)/\sqrt{2\kappa}=e^{\delta}$）．これは前講（9）と一致している．

【2ソリトン解】 この場合（34）は第7講（16）を与える．

Tea Time

逆散乱法とは

たとえば地面の下に重い鉄の塊が埋まっていたとすると，表面の物体はそのほうへ引かれるから，いわゆる重力異常が生じる．鉄の塊の形，大きさ，深さを知っているものとすれば，これによる重力異常は容易に計算できる．これを順問題とすれば，地表における重力異常の測定値から地下の鉄塊の形，大きさ，深さを推定するのは逆問題である．

また，たとえば物体の形，性質を与えて，これによる電波の散乱を求めるのを散乱の順問題とすれば，反射されてきた電波を測定して散乱体の形，性質を推定するのは逆散乱の問題である．

レーダー，魚群探知機，超音波による診断など，このような逆問題，逆散乱の問題はきわめて広い応用がある．「形の科学」の大きな研究分野でもあり，数学的にも重要な問題でもある．数学者のカッツ（M. Kac）は「太鼓の音を聞いてその太鼓の形が決められるか」という設問を提出した（1966年）．答えは一義的でないらしい．これは後に述べるように同じスペクトルをもつ双対系（第10講参照）が存在することからも推察されると思われる．実際には答をある程度狭めたときにどのような最小の散乱データ（情報）からその物体の形などを推定できるかということであろう．

第10講

双対格子

—テーマ—

- ◆ 1次元格子
- ◆ 双対関係
- ◆ Tea Time: ルビンの壺

1次元格子

波動を伝える媒質として質点をばねでつないだものを考える．これを格子模型といい，直線状のものを1次元格子という．ここでは質量はすべて等しく，質点をつなぐばねはすべて同じ格子，すなわち均一な1次元格子を考えることにする．

1次元格子において左から右へ数えてn番目の質点の変位をQ_nとすれば（図29），その左のばねの伸びは$r_{n-1}=Q_n-Q_{n-1}$であり，右のばねの伸びは$r_n=Q_{n+1}-Q_n$である．左からn番目の質点の質量をm_nとし，ばねの伸びがrのときの

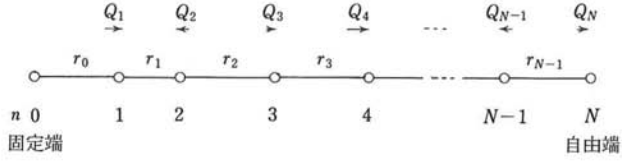


図29

ばねのポテンシャルエネルギーを $\phi(r)$ とする．左のばねの力は $-\phi_n'(r_n)=-d\phi_n(r_n)/dr_n$，右のばねの力は $\phi'(r_{n+1})$ であるから，n 番目の質点の運動方程式は

$$\boxed{\begin{aligned} m_n\ddot{Q}_n &= -\phi_n'(r_{n-1})+\phi_{n+1}'(r_n) \\ r_n &= Q_{n+1}-Q_n \end{aligned}} \qquad (1)$$

である $(\ddot{Q}_n=d^2Q_n/dt^2)$．

N個の粒子から成る1次元格子の運動エネルギーは

$$T=\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{2}\dot{Q}_n^2 \qquad (2)$$

であり，変位 Q_n に共役な運動量は

$$P_n=\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_n}=m_n\dot{Q}_n \qquad (3)$$

である．これを用いるとハミルトン関数は

$$\boxed{H(Q,P)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{P_n^2}{m_n}+\sum_{n=1}^{N}\phi_n(Q_n-Q_{n-1})} \qquad (4)$$

と書ける．

ここで $r_n=Q_{n+1}-Q_n$ を一般座標（広義座標）とする正準変換を考えよう．変位 Q_n から r_n へ移る変換は

$$\begin{aligned} Q_1&=r_0, \qquad Q_2=r_0+r_1,\cdots \\ \dot{Q}_1&=\dot{r}_0, \qquad \dot{Q}_2=\dot{r}_0+\dot{r}_1,\cdots \end{aligned} \qquad (5)$$

したがって運動エネルギーは

$$T(\dot{r})=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}m_n(\dot{r}_0+\dot{r}_1+\cdots+\dot{r}_{n-1})^2 \qquad (6)$$

であり，r_n に共役な運動量を s_n とすると，これは

$$s_n=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_n}=\sum_{j=n}^{N}m_j(\dot{r}_0+\dot{r}_1+\cdots+\dot{r}_{j-1}) \qquad (7)$$

である．したがって

$$s_{n-1}-s_n=m_n\dot{Q}_n \qquad (n=1,2,\cdots,N-1)$$
$$s_{-1}-s_0=0, \qquad s_N=0 \tag{8}$$

である．これを用いるとハミルトン関数は

$$H(r,s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2m_n}(s_{n-1}-s_n)^2+\sum_{n=0}^{N-1}\phi_n(r_n) \tag{9}$$

となり，正準運動方程式は

$$\dot{r}_n=\frac{\partial H}{\partial s_n}=-\frac{s_{n-1}-s_n}{m_n}+\frac{s_n-s_{n+1}}{m_{n+1}}$$

$$\dot{s}_n=-\frac{\partial H}{\partial r_n}=-\phi_n'(r_n) \tag{10}$$

となる．

双対関係

正準変数を (Q,P) としたときと (r,s) としたときの体系はたがいに双対関係にあるという．(Q,P) で表したときの運動方程式は（1）で与えられる．これに対し (r,s) で表したときの運動方程式は (10) であるが，(10) の第2式が r_n について逆に解けるとしてこれを

$$r_n=-\frac{1}{m_n}X_n(\dot{s}_n) \tag{11}$$

とすると (10) の第1式は

$$\frac{1}{m_n}\frac{d}{dt}X_n(\dot{s}_n)=\frac{s_{n-1}-s_n}{m_n}-\frac{s_n-s_{n+1}}{m_{n+1}} \tag{12}$$

となる．これが（1）の双対格子である．

とくに粒子の質量がすべて等しく m であるとすると（1）は

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}_n)=\phi_{n+1}'(r_{n+1})+\phi_{n-1}'(r_{n-1})-2\phi_n'(r_n) \tag{13}$$

となり (12) は

$$\frac{d}{dt}X_n(\dot{s}_n)=s_{n+1}+s_{n-1}-2s_n \tag{14}$$

となる．(13) では右辺の相互作用が r_n に対して一般に非線形であるのに対し，双対格子 (14) では右辺の相互作用が s_n について線形になっていて，その代わり左辺の慣性項に当たる $X_n(\dot{s}_n)$ が一般に非線形である．ただし $\phi_n'(r)$ が r に関して線形な線形格子では (13) も (14) も線形になる．

線 形 格 子

線形格子のハミルトン関数を（K_n はばね定数）

$$H(Q,P)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2m_n}P_n{}^2+\sum_{n=1}^{N}\frac{K_n}{2}(Q_n-Q_{n-1})^2 \tag{15}$$

とすると，これに対する双対格子のハミルトン関数は

$$H(s,-r)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2m_n{}^*}r_n{}^2+\sum_{n=1}^{N}\frac{K_n{}^*}{2}(s_{n+1}-s_n)^2 \tag{16}$$

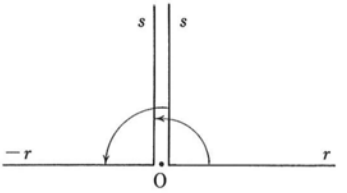


図 30

と書ける．ただし，(9) では r を座標，s を運動量として $H(r,s)$ と書いたが，(r,s) 座標系を 90° 回し（これも 1 つの正準変換である），s を座標，$-r$ を運動量とみて，ここではハミルトン関数を $H(s,-r)$ と書いた（図 30）．

この場合

$$\phi_n(r)=\frac{K_n}{2}r_n{}^2 \tag{17}$$

であるから，(9) と (16) を比べてわかるように

$$\frac{1}{m_n{}^*}=K_n,\qquad K_n{}^*=\frac{1}{m_n} \tag{18}$$

とおける．もう少し一般的には a を定数として正準変換 $r_n\to r_n/a$，$s_n\to as_n$ を行ってもよい．このあとでハミルトン関数を (16) とすると双対関係は

$$\frac{1}{m_n{}^*}=\frac{K_n}{a^2},\qquad K_n{}^*=\frac{a^2}{m_n} \tag{19}$$

となる.

格子と双対格子とは運動はまったく同等である. とくに双対系の固有振動数はすべて相等しい.

格子の固定端は無限大の質量 $m_0=\infty$ と考えてよい. これに対する双対格子では $K_0^*=0$ である. したがって格子の固定端は双対格子の自由端に相当し, 自由端は双対系の固定端に相当する. 格子の質量 (ばね) は双対格子のばね (質量) に対応する.

$$K_1m_1^*=m_1K_1^*=K_2m_2^*=\cdots=K_Nm_N^*=m_NK_N^* \tag{20}$$

とすれば双対系の対応する固有振動はすべて等しい.

【簡単な例】

1. (固定端)$\overset{K}{\text{———}}m$ (自由端) (21)

には双対系 (* で表す) の

(自由端)$^*m^*\overset{K_n}{\text{———}}$ (固定端)* (21′)

が対応し, これらの系の固有振動は

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{K^*}{m^*}} \tag{21″}$$

2. (自由端)$m_1\overset{K}{\text{———}}m_2$ (自由端) (22)

(固定端)$^*\overset{K_1^*}{\text{———}}m^*\overset{K_2^*}{\text{———}}$ (固定端)* (22′)

これらの系の固有振動数は

$$\omega=\sqrt{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)K}=\sqrt{\frac{K_1^*+K_2^*}{m^*}} \tag{22″}$$

3. 局在振動. 無限に長い一様な格子に軽い不純物 (質量 $m_0(<m)$) が1個入っているとき, このまわりに局在振動が起こる. その振動数は

$$\omega_{\text{loc}}=\sqrt{\frac{4K}{m}}\Big/\sqrt{\frac{m_0}{m}\left(2-\frac{m_0}{m}\right)} \tag{23}$$

で与えられることが示される. これに対する双対系では1つのばね (K_0^*) が他のもの (K^*) よりも強い場合

$$mK^*=Km^*=m_0K_0^* \tag{23′}$$

になるような K_0^*, m^* をとれば，双対系の局在振動数は (23) と同じで

$$\omega_{\mathrm{loc}}=\sqrt{\frac{4K^*}{m^*}}\,\frac{K_0^*}{K^*}\Big/\sqrt{2\frac{K_0^*}{K^*}-1} \tag{23''}$$

LC 回 路

1次元格子は1次元のはしご型 LC 回路と同等である．これを示すため図31のような回路を考えよう．インダクタンス L_n はコイルで，これを貫く磁束を Φ_n とする．C_n はキャパシタンス（コンデンサー）である．I_n は電流，V_n は電圧であり，コンデンサーの電荷を q_n とする．

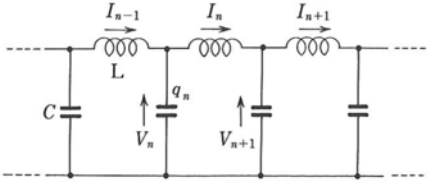


図 31

電荷の保存から

$$\frac{dq_n}{dt}=I_{n-1}-I_n \tag{24}$$

インダクタンスの誘導起電力の関係（ファラデーの電磁誘導の法則）から

$$\frac{d\Phi_n}{dt}=V_n-V_{n+1} \tag{25}$$

が成り立つ．

簡単のため一様な回路（インダクタンス，キャパシタンスが同一の回路）を考えよう．線形のインダクタンス L，キャパシタンス C を仮定すると

$$\begin{aligned}\Phi_n&=LI_n\\ q_n&=CV_n\end{aligned} \tag{26}$$

この場合は (24)～(26) から

$$L\frac{d^2q_n}{dt^2}=\frac{1}{C}(q_{n+1}+q_{n-1}-2q_n) \tag{27}$$

が導かれる．これを力学的な線形格子の式（1）と比べればわかるように，インダクタンス L は質量に，キャパシタンス C の逆数はばね定数に相当する．

【非線形回路】 インダクタンスは線形であるが，キャパシタンスは非線形である場合を考えよう．このときは

$$L\frac{dI_n}{dt}=V_n-V_{n+1}$$
$$V_n=f(q_n) \tag{28}$$

とおける．すると (24) により

$$L\frac{d^2q_n}{dt^2}=-f(q_{n+1})-f(q_{n-1})+2f(q_n) \tag{29}$$

を得る．これを (13)，(14) と比べて

$$\dot{s}_n=f(r_n), \qquad r_n=q_n \tag{30}$$

とおけば LC 回路 (29) の双対系が (14) で $-X_n$ を $f(q_n)$ の逆関数としたもので与えられる．すなわち

$$V_n=f(q_n), \qquad q_n=-X(V_n) \tag{31}$$

と書けば LC 回路 (29) は

$$L\frac{d^2}{dt^2}X(V_n)=V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n \tag{32}$$

となる．

とくに

$$L=m, \qquad V=a(e^{-bq}-1)$$
$$X(V)=\frac{1}{b}\log\left(1+\frac{V}{a}\right) \tag{33}$$

とすれば (32) は

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\left(1+\frac{V_n}{a}\right)=\frac{b}{m}(V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n) \tag{34}$$

となる．これは次講で述べる戸田格子に対する LC 回路の方程式である．

Tea Time

ルビンの壺

双対関係というのは1つのものに2つの見方があることといってもよいだろう．そう解釈すると，世の中にはこのようなものがたくさんある．

すぐに思いつくものとして「ルビンの壺」という絵がある (図32)．黒地に白い

図32　ルビンの壺

壺がえがかれているようにみえるが，壺の両側の輪郭線を注目してみていると向かい合った人の横顔がみえてくる．壺に注目すると顔はみえなくなり，顔に注目すると壺がみえなくなる．壺と顔とは双対系である．これは心理学で「図と地の反転図形」というのだそうで，デンマークの学者ルビンが研究した（1921年）．

双対格子を考え出したとき，双対，英語で dual という字を当てたが，本当に適当な用語だったかどうか，ちよっと自信がない．dualism は二重性と訳されている．量子力学で電子は波であり，同時に粒子であるというのは二重性である．ボーアは相補性という言葉をよく用いたという．たとえば，1点の雲もなく晴れ上がった富士山の景色と雲が去来する富士の景観とは相補的である．両方をいっぺんにみることはできない．そして両方をみて初めて富士山の景色が理解できる．同じように，電子を波として観察するときはその粒子性はみえず，粒子として観察するときはその波動性はみえないというわけである．しかし相補性（complementarity）には両方があって初めて完全になるという意味があるのに対し，双対性というときは必ずしも2つの見方が必要というわけではないようである．たとえば LC 回路の式は電圧に対する式としてもよいし，電荷あるいは電流に対する式としてもよい．これらは双対系で，どちらの記述でも完全なのである．

友人の孫がけん玉を始めて「ひとがみていないとうまくできるんだけど…」という．ひとがみている状態とそうでない状態とは双対的なのだろうか，それとも相補的なのだろうか．

第 11 講

非線形格子波動

テーマ

- ◆ 戸田格子
- ◆ 戸田格子の双対格子
- ◆ Tea Time: 戸田格子の発見

戸田格子

第 10 講で述べた 1 次元格子はばねの力 $-\phi'(r)$ が r に比例しないとき，すなわち非線形格子の場合，運動方程式は一般に解けない．しかしとくに A, a, b を定数としてばねのポテンシャルが

$$\phi(r)=Ae^{-br}+ar+\text{定数} \qquad (1)$$

のとき（図 33）は厳密に解ける（$A>0, a$ と b は同符号，以下ではすべて正とし

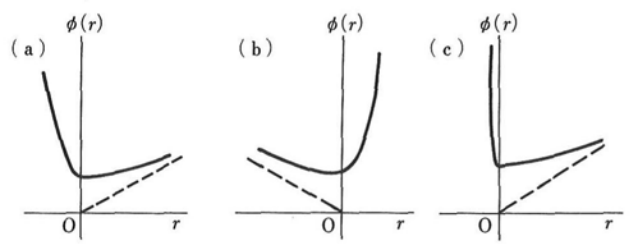


図 33
a：$b>0$ の場合，b：$b<0$ の場合，c：b が大きい場合

ておく)．これを戸田格子，あるいは指数格子という．1967年の発見である．$r=0$ のとき $\phi(r)$ が極小になるようにすれば付加定数を除いて（1）は

$$\boxed{\phi(r)=\frac{a}{b}e^{-br}+ar} \tag{2}$$

と書ける．そして運動方程式は（格子の端を除いて）

$$\boxed{m\ddot{Q}_n=a(e^{-br_{n-1}}-e^{-br_n})} \tag{3}$$

となる．格子の端を除けば（2）の右辺の第2項 ar は質点の左右で打ち消し合って運動方程式に現れないが，自由端をもつ格子では特別の配慮が必要である．

以下では簡単のため，無次元化しよう．形式的には $m=a=b=1$ とすればよい．このとき $r_n=Q_{n+1}-Q_n$ に対し

$$\ddot{r}_n=2e^{-r_n}-e^{-r_{n-1}}-e^{-r_{n+1}} \tag{4}$$

を得る．ここで

$$\boxed{e^{-r_n}-1=\dot{s}_n} \tag{5}$$

によって s_n を導入する（$\dot{s}_n=ds_n/dt$）．逆に r_n について解けば

$$r_n=-\log(1+\dot{s}_n) \tag{6}$$

となるので，これを（4）に代入すれば

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1+\dot{s}_n)=\frac{d}{dt}(s_{n-1}+s_{n+1}-2s_n) \tag{7}$$

となる．これを t で積分して積分定数を0とすれば

$$\frac{d}{dt}\log(1+\dot{s}_n)=s_{n-1}+s_{n+1}-2s_n \tag{8}$$

を得る．

（3），（4）において右辺（相互作用）は r_n あるいは Q_n について非線形であったが，これを書き直した（8）においては右辺の相互作用の部分が線形化され，左辺の慣性を表す部分が非線形になっている．このような変換，すなわち質点とばねの立場を交換する変換は双対変換である（第10講参照）．

さらに

$$s_n=\frac{dS_n}{dt} \tag{9}$$

によって S_n を導入すれば，（8）は

$$\log(1+\ddot{S}_n)=S_{n-1}+S_{n+1}-2S_n \tag{10}$$

となる．これも便利な式である．

(10) の解 S_n が求められたとすると運動は（5）により

$$e^{-r_n}-1=\ddot{S}_n \tag{11}$$

によって与えられる．また (11) を (10) に入れればわかるように

$$r_n=2S_n-S_{n-1}-S_{n+1} \tag{12}$$

ここで $r_n=Q_{n+1}-Q_n$ であるから

$$Q_n=S_{n-1}-S_n+\text{定数} \tag{13}$$

であることもわかる．さらにこれを時間で微分し

$$P_n=\dot{Q}_n=S_{n-1}-S_n \tag{14}$$

を得る．P_n は質点の運動量であることを注意しておこう．

格子ソリトン

(12) を解くために

$$S_n=\log\phi_n(t) \tag{15}$$

とおくと (10) は

$$\phi_n\ddot{\phi}_n-\dot{\phi}_n{}^2=\phi_{n-1}\phi_{n+1}-\phi_n{}^2 \tag{16}$$

となる．

【ソリトン解】 ここで

$$\boxed{\phi_n=\cosh\,(kn-\beta t+\delta)} \tag{17}$$

あるいは

$$\boxed{\phi_n=1+e^{\pm 2(kn-\beta t+\delta)}} \tag{17'}$$

とおくと (16) は

$$\boxed{\beta=\pm\sinh k} \tag{18}$$

によって満足される．k と δ は任意である．これに対し (11) はソリトン解

$$\boxed{e^{-r_n}-1=\beta^2\,\mathrm{sech}^2(kn+\beta t+\delta)} \tag{19}$$

を与える．(18) において右辺のプラス符号を取れば左へ進むソリトン，マイナス符号を取れば右へ進むソリトンになる．その速度は格子間隔を単位として

$$c=\frac{|\beta|}{k}=\frac{\sinh k}{k} \tag{20}$$

で与えられる．

なお，(13) からこのソリトンに対して各粒子の変位は

$$\boxed{Q_n=\log\frac{1+e^{2(kn-k-\beta t)}}{1+e^{2(kn-\beta t)}}+Q_{-\infty}} \tag{21}$$

となる（右へ進むソリトンを考え，また $\delta=0$ とした）．$k>0$ とすると

$$Q_\infty=Q_{-\infty}-2k \tag{22}$$

となるが，これはソリトンによって格子全体が縮んだ長さを与える．ソリトンのもつ質量といってもよい（このソリトンは圧縮パルスであるが，これは初めに $b>0$ とおいたからで，$b<0$ とすれば伸張パルスになる）．

なお (21) は

$$\boxed{e^{Q_n-Q_{-\infty}}=z\,\frac{\cosh\,\{k(n-1)-\beta t\}}{\cosh\,(kn-\beta t)}} \tag{23}$$

ただし

$$\boxed{z=e^{-k}} \tag{23'}$$

と書けることを注意しておこう.

なお第10講の V_n を用いれば

$$V_n=\dot{s}_n=e^{-r_n}-1 \tag{24}$$

であり，ソリトンは (19) により

$$V_n=\beta^2\,\mathrm{sech}^2(kn\pm\beta t+\delta),\qquad \beta=\sinh k \tag{25}$$

となる.

Tea Time

戸田格子の発見

質問 いろいろ参考になりそうなので，戸田格子の発見のころのことをお聞かせください．まず研究の動機は何ですか.

答 そのころ，不純物を含んだ体系のスペクトル，具体的には格子振動のスペクトルの問題をみんなでやっていました．これに関連して，まだ厳密に扱われていない結晶の熱伝導の問題にも興味をもっていましたが，これには非線形波動を厳密に扱うのが先であると考えました.

質問 非線形波動を扱ったフェルミらの計算が動機かと思っていました.

答 フェルミらの計算をみたのは戸田格子を発見したあとのことです．この計算はロスアラモス研究所の報告として発表されたので，当時手に入りませんでした．しかしこの計算をもっと簡単な3粒子系で吟味したJ.フォードの論文を2つばかり読んで，積分可能な非線形波動があるに違いないと思ったのが研究の動機です．非線形波動の厳密解などあるはずがないというのが常識だったのですが.

質問 そこですぐ指数関数型の相互作用を考えたのでしょうか.

答 いいえ，相互作用から考えたのではありませんでした．1次元格子の運動方程式は，非線形波動を研究しようとした人はだれでも最初に考えるに違いないし，それが成功していないのですから，別の発想をしたほうがよい．そこでその

裏のような双対格子に集中したのです．これは発想の逆転の第1です．次に相互作用を仮定するのが常識的でしょうが，むしろ非線形波動を仮定することを考えました．これが第2の発想の逆転です．線形の波の代表的なものは3角関数の正弦波ですから，非線形波動の代表は楕円関数だろう．ところが楕円関数というのは振り子の運動ぐらいしか習っていないので，ほとんど初めから勉強しました．そして楕円関数の性質で双対格子と結び付くものはないかといろいろ調べたのですが，なかなかうまくいきませんでした．ちょうど夏休みで海辺へ行っていたのですが，雨の日などそのことをあれこれ考えあぐんでいたのですが，あるとき正弦波の2乗はやはり正弦波だが，楕円関数の2乗はそう簡単ではないということに気がついて，2乗を試しているうちに発見の曙光がみえてきたのでした．それからあとのガイディング・プリンシプルは，双対格子から計算される相互作用が非線形波動の波長や振幅に無関係に定まらなければならないということでした．

質問　格子ソリトンは楕円関数から出てきたのですか．

答　初め考えたのは周期的な波動で，つまり周期格子の波動が発見されたわけです．ソリトンというものがあるというのは京都大学で流体力学の人から教わったのです．KdV方程式のソリトンです．それを教わって，世の中にソリトンというものがあるのを知ってから格子ソリトンはすぐにみつかりました．次にKdV方程式に2ソリトン解があることを知って，その解を眺めているうちに格子についての2ソリトン解に気がつきました．こうしてみると簡単なようですが，発見というものはそういうものなのでしょうね．力学の開拓者の1人であったステビンがいっているように，「不思議であるが（発見したあとでは）まったく不思議でない」ということなのです．

第 12 講

格子の 2 ソリトン解

—テーマ—

- ◆ 2 ソリトン解
- ◆ ソリトンの衝突
- ◆ Tea Time: ソリトンと非線形波動方程式

2 ソリトン解

前講に続いて格子の 2 ソリトン解について述べる．解くべき方程式は前講(18)の式

$$\phi_n\ddot{\phi}_n-\dot{\phi}_n{}^2=\phi_{n-1}\phi_{n+1}-\phi_n{}^2 \tag{1}$$

である．2 ソリトンに対し，KdV 方程式の場合にならって

$$\boxed{\begin{aligned}&\phi_n=1+a_1e^{-2\eta_1}+a_2e^{-2\eta_2}+a_3e^{-2(\eta_1+\eta_2)}\\&\eta_i=k_in-\beta_it\qquad(i=1,2)\end{aligned}} \tag{2}$$

とおく．ここで

$$\boxed{z_i=e^{-k_i}}\qquad e^{-2\eta_i}=z_i{}^{2n}e^{2\beta_it}\qquad(i=1,2) \tag{2'}$$

とおくと便利である．z_i は正または負の実数値を取るものとし，そのため k_i は実数か（実数$+\pi i$）であると考えておく．

（2）を（1）に代入すると（1）が満たされるためには

$$\beta_i=\sin k_i=\frac{z_i^{-1}-z_i}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_1a_2}=\frac{4(\beta_1-\beta_2)^2-\left(\dfrac{z_2}{z_1}-\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{z_1z_2}-z_1z_2\right)^2-4(\beta_1+\beta_2)^2} \tag{3}$$

であればよいことがわかる．

ここで恒等式

$$\begin{aligned}2(\beta_1-\beta_2)&=z_1^{-1}-z_1-(z_2^{-1}-z_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{z_1z_2}}+\sqrt{z_1z_2}\right)\left(\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}-\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}\right)\\ 2(\beta_1+\beta_2)&=z_1^{-1}-z_1+(z_2^{-1}-z_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{z_1z_2}}-\sqrt{z_1z_2}\right)\left(\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}+\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

から得られる式

$$\begin{aligned}\left\{\frac{2(\beta_1-\beta_2)}{\dfrac{1}{z_1z_2}-z_1z_2}\right\}^2&=\left\{\frac{\dfrac{z_2}{z_1}-\dfrac{z_1}{z_2}}{2(\beta_1+\beta_2)}\right\}^2=\frac{4(\beta_1-\beta_2)^2-\left(\dfrac{z_2}{z_1}-\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{z_1z_2}-z_1z_2\right)^2-4(\beta_1+\beta_2)^2}\\ &=\left(\frac{\sqrt{\dfrac{z_2}{z_1}}-\sqrt{\dfrac{z_1}{z_2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{z_1z_2}}-\sqrt{z_1z_2}}\right)^2=\left(\frac{z_2-z_1}{1-z_1z_2}\right)^2\end{aligned} \tag{5}$$

を用いれば

$$\frac{a_3}{a_1a_2}=\left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1z_2}\right)^2 \tag{6}$$

となる．

【ソリトンの衝突】（3）において β_1 と β_2 が同符号であれば2個のソリトンは同じ向きに進み，波高の高いソリトンが低いソリトンに追いつき追い越す．またこれらが異符号であれば2個のソリトンは反対向きに走り正面衝突をする．

1.　追い越し衝突

$$\beta_1=\sinh k_1,\qquad \beta_2=\sinh k_2\qquad (k_1, k_2 \text{は同符号}) \tag{7}$$

この場合は $z_1=e^{-k_1}$，$z_2=e^{-k_2}$ とおき（6）の a_3/a_1a_2 を書き直すと

$$\frac{a_3}{a_1a_2}=\left(\frac{\sinh\dfrac{k_1-k_2}{2}}{\sinh\dfrac{k_1+k_2}{2}}\right)^2 \tag{7'}$$

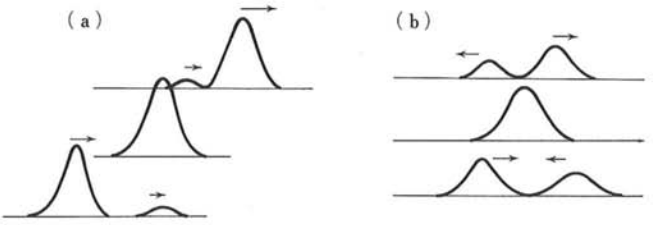


図 34
a：追い越し衝突，b：向心衝突．

となる．ソリトンの漸近形は

$$e^{-\tau_n}-1=\begin{cases}\beta_1^2\,\mathrm{sech}^2(k_1n-\beta_1t+\delta_1^{(\pm)})\\ \beta_2^2\,\mathrm{sech}^2(k_2n-\beta_2t+\delta_2^{(\pm)})\end{cases}\qquad(t\to\pm\infty)$$

$$\delta_1^{(-)}=\frac{1}{2}\log a_1,\qquad \delta_1^{(+)}=\frac{1}{2}\log\frac{a_3}{a_2}\tag{8}$$

$$\delta_2^{(-)}=\frac{1}{2}\log\frac{a_3}{a_1},\qquad \delta_2^{(+)}=\frac{1}{2}\log a_2$$

で与えられる．

2. 向心衝突

$$\beta_1=\sinh k_1,\qquad \beta_2=-\sinh k_2\qquad (k_1,k_2\text{は同符号})\tag{9}$$

$z_1=e^{-k_1}$，$z_2=e^{-k_2+\pi i}$ とおいて

$$\frac{a_3}{a_1a_2}=\left(\frac{\cosh\dfrac{k_1-k_2}{2}}{\cosh\dfrac{k_1+k_2}{2}}\right)^2\tag{9'}$$

漸近形は

$$e^{-\tau_n}-1=\begin{cases}\beta_1^2\,\mathrm{sech}^2(k_1n-\beta_1t+\delta_1^{(\pm)})\\ \beta_2^2\,\mathrm{sech}^2(k_2n+|\beta_2|t+\delta_2^{(\pm)})\end{cases}\qquad(t\to\pm\infty)$$

$$\delta_1^{(-)}=\frac{1}{2}\log a_1,\qquad \delta_1^{(+)}=\frac{1}{2}\log\frac{a_3}{a_2}\tag{10}$$

$$\delta_2^{(-)}=\frac{1}{2}\log\frac{a_3}{a_1},\qquad \delta_2^{(+)}=\frac{1}{2}\log a_2$$

行列式表現

1ソリトン解を表す式（前講(17′)）において

$$e^{-k}=z, \qquad e^{2\delta}=\frac{1}{1-z^2}$$
$$c(t)=c(0)e^{\beta t}, \qquad \beta=\frac{z^{-1}-z}{2} \tag{11}$$

とおくことにより1ソリトンに対する ϕ_n は

$$\phi_n=1+\frac{c(t)^2z^{2n}}{1-z^2} \tag{12}$$

と書くことができる．

2ソリトン解に対する式（6）は

$$\frac{a_3}{a_1a_2}=\left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1z_2}\right)^2=1-\frac{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}{(1-z_1z_2)^2} \tag{13}$$

と書けるので

$$a_1=\frac{c_1(0)^2}{1-z_1^2}, \qquad a_2=\frac{c_2(0)^2}{1-z_2^2} \tag{14}$$

とすると（2）は

$$\phi_n=1+\frac{c_1(0)^2}{1-z_1^2}e^{-2\eta_1}+\frac{c_2(0)^2}{1-z_2^2}e^{-2\eta_2}$$
$$+\left\{\frac{1}{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}-\frac{1}{(1-z_1z_2)^2}\right\}c_1(0)^2c_2(0)^2e^{-2(\eta_1+\eta_2)} \tag{15}$$

となる．これは行列式の形で

$$\phi_n=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{c_1(0)^2}{1-z_1^2}e^{-2\eta_1} & \dfrac{c_1(0)c_2(0)}{1-z_1z_2}e^{-(\eta_1+\eta_2)} \\ \dfrac{c_2(0)c_1(0)}{1-z_1z_2}e^{-(\eta_2+\eta_1)} & 1+\dfrac{c_2(0)^2}{1-z_2^2}e^{-2\eta_2} \end{vmatrix} \tag{15′}$$

あるいは

$$\phi_n=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{c_1(t)^2z_1^{2n}}{1-z_1^2} & \dfrac{c_1(t)c_2(t)(z_1z_2)^n}{1-z_1z_2} \\ \dfrac{c_2(t)c_1(t)(z_1z_2)^n}{1-z_1z_2} & 1+\dfrac{c_2(t)^2z_2^{2n}}{1-z_2^2} \end{vmatrix} \tag{15″}$$

と書ける．ただし

$$z_i = e^{-k_i}$$

$$c_i(t) = c_i(0)\, e^{\beta_i t}, \qquad \beta_i = \frac{z_i^{-1} - z_i}{2} \qquad (i=1,2) \tag{16}$$

これから推察されるように N ソリトン解は行列式の形で

$$\boxed{\psi_n = \det B(n)} \tag{17}$$

で与えられる（第 14 講参照）．ここで $N\times N$ 行列 $B(n)$ の成分は

$$\boxed{\{B(n)\}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{c_i(t)\, c_j(t)\, (z_i z_j)^n}{1 - z_i z_j}} \tag{18}$$

である．ただし δ_{ij} はクロネッカーの δ 関数，すなわち $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0\,(i\neq j)$ であり，

$$\boxed{c_i(t) = c_i(0)\, e^{\beta_i t}, \qquad \beta_i = \frac{z_i^{-1} - z_i}{2} \qquad (i=1,2,\cdots,N)} \tag{19}$$

を意味する．

Tea Time

ソリトンと非線形波動方程式

非線形波動方程式を学ぶのは，線形波動方程式（偏微分方程式）から入って，分散項を入れ，非線形項を入れるという段階を経るのがふつうである．偏微分方程式から入らずに積分方程式（たとえば第 9 講のゲレファント-レビタンの方程式など）から入る方法もあるわけであるが，積分方程式はわかりにくいから敬遠されがちである．

ソリトンという運動が実際にあることがわかったのは 1965 年のソリトン発見以来のことであるが，ソリトンを仮定して運動方程式を考えるという発見的方法もあるわけである（これは楕円関数で表される周期的な解を仮定することによって戸田格子を発見したのと類似な方法である）．運河の中に孤立波を発見したス

コット・ラッセル（第6講 Tea Time 参照）は孤立波の研究からこんな発想をしてもよかったかもしれない（そうすれば彼はコルテヴェーグらよりも早くKdV方程式を発見しただろう）．

たとえばソリトンとしてスコット・ラッセルが

$$u=\alpha k^2\,\mathrm{sech}^2(kx-k^3t)\qquad(k=\text{任意定数})$$

を水槽実験から見出したとする．この式から k を消去せよ．答は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\alpha k^5\frac{\sinh(kx-k^3t)}{\cosh^3(kx-k^3t)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\alpha k^3\frac{\sinh(kx-k^3t)}{\cosh^3(kx-k^3t)}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=-8\alpha k^5\frac{\sinh(kx-k^3t)}{\cosh^3(kx-k^3t)}+24\alpha k^5\frac{\sinh(kx-k^3t)}{\cosh^5(kx-k^3t)}$$

したがって

$$4\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{12}{\alpha}u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

これはKdV方程式である．とくに $\alpha=2$ とおき，$t/4$ を改めて t と書くとソリトン

$$u=2k^2\,\mathrm{sech}^2(kx-4k^3t)$$

をもつ波の方程式としてよく知られた方程式

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$$

が得られる．格子についても同様なことがいえるはずである．

第13講

格子のラックス形式と保存量

—テーマ—

- ◆ 3粒子周期格子
- ◆ ラックス形式
- ◆ Tea Time: 保存量

周期的な格子

非線形格子の運動方程式は無次元の形で

$$\frac{d^2Q_n}{dt^2}=e^{-(Q_n-Q_{n-1})}-e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} \tag{1}$$

と書ける．運動量

$$P_n=\frac{dQ_n}{dt} \tag{2}$$

を導入すれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}&=(P_{n+1}-P_n)\,e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}\\ \frac{dP_n}{dt}&=e^{-(Q_n-Q_{n-1})}-e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}\end{aligned} \tag{3}$$

と書き直すことができる．ここで

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2}e^{-(Q_{n+1}-Q_n)/2}\\ b_n&=\frac{1}{2}P_n\end{aligned} \tag{4}$$

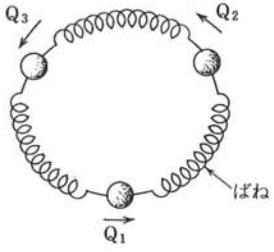


図 35

とおくと（3）から運動方程式は

$$\frac{da_n}{dt}=a_n(b_n-b_{n+1})$$
$$\frac{db_n}{dt}=2(a_{n-1}{}^2-a_n{}^2) \tag{5}$$

というきれいな形になる．

たとえば3粒子から成る周期格子（図35）を考えると，周期条件は

$$a_0=a_3, \qquad b_0=b_3 \tag{6}$$

であり，運動方程式（5）は

$$\dot{a}_1=a_1(b_1-b_2), \qquad \dot{b}_1=2(a_3{}^2-a_1{}^2)$$
$$\dot{a}_2=a_2(b_2-b_3), \qquad \dot{b}_2=2(a_1{}^2-a_2{}^2) \tag{7}$$
$$\dot{a}_3=a_3(b_3-b_1), \qquad \dot{b}_3=2(a_2{}^2-a_3{}^2)$$

となる．ここで行列

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 \end{bmatrix}$$
$$B=\begin{bmatrix} 0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

を導入すると，運動方程式（7）はラックス形式

$$\boxed{\frac{dL}{dt}=BL-LB} \tag{9}$$

で表される．

N個の粒子から成る輪の形をした周期系

$$a_0=a_N, \qquad b_0=b_N \tag{10}$$

でも運動方程式はラックス形式（9）で表される．ただしこのときはLとBは$N\times N$行列

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{N-1} & a_{N-1} \\ 0 & & & b_{N-1} & a_{N-1} & \\ a_N & 0 & & 0 & a_{N-1} & b_N \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{N-1} \\ 0 & & & 0 & -a_{N-1} & \\ -a_N & 0 & \cdots & a_{N-1} & 0 & \end{bmatrix} \tag{11}$$

である．Lは対称行列，Bは反対称行列である．

a_n，b_nは時間の関数であるからL，Bも時間tの関数である．このことを$L(t)$，$B(t)$と書こう．ここで時間変化が

$$\frac{dU(t)}{dt}=B(t)U(t), \qquad U(0)=1 \tag{12}$$

で与えられる行列$U(t)$を考えると，これは逆行列$U^{-1}(t)$をもち，運動方程式(9)は積分されて$L(t)$は初期値$L(0)$と

$$L(t)=U(t)L(0)U^{-1}(t) \tag{13}$$

で結ばれることが示される，この事実を$L(t)$と$L(0)$とはユニタリ等価であるという．

【証明】 行列Aの行と列とを入れ換えて各成分を複素共役にしたものを初めの行列のエルミート共役といい，$A^\dagger$で表す．(11)の行列は成分が実数であるが，反対称なので

$$B^\dagger(t)=-B(t) \tag{14}$$

である．(12)のエルミート共役をとると

$$\frac{dU^{\dagger}(t)}{dt}=-U^{\dagger}(t)B(t) \tag{15}$$

を得る．したがって

$$\frac{dU^{\dagger}U}{dt}=\frac{dU^{\dagger}}{dt}U+U^{\dagger}\frac{dU}{dt}=0 \tag{16}$$

を得る．したがって$U^{\dagger}U$は時間によらず一定であり，初期条件$U(0)=U^{\dagger}(0)=1$により$U^{\dagger}(t)U(t)=1$，したがって$U^{\dagger}(t)$は$U(t)$の逆行列$U^{-1}(t)$である．すなわち

$$\begin{aligned}U^{\dagger}(t)&=U^{-1}(t)\\ U^{-1}(t)U(t)&=U(t)U^{-1}(t)=1\end{aligned} \tag{17}$$

よって (12)，(15) は

$$\begin{aligned}\frac{dU(t)}{dt}&=B(t)U(t), &U(0)&=1\\ \frac{dU^{-1}(t)}{dt}&=-U^{-1}(t)B(t), &U^{-1}(0)&=1\end{aligned} \tag{18}$$

そこで (13) をtで微分すれば

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt}&=\frac{dU(t)}{dt}L(0)U^{-1}(t)+U(t)L(0)\frac{dU^{-1}(t)}{dt}\\ &=B(t)U(t)L(0)U^{-1}(t)-U(t)L(0)U^{-1}(t)B(t)\\ &=B(t)L(t)-L(t)B(t)\end{aligned} \tag{19}$$

これは（9）にほかならない．∎

$L(t)$は$N\times N$行列なので，$L(t)$の固有関数を$N\times 1$行列$\varphi(t)$とし，固有値をλとして

$$\boxed{L(t)\varphi(t)=\lambda\varphi(t)} \tag{20}$$

とおく．このとき，固有値λは時間によらない．すなわち

$$\boxed{\frac{d\lambda}{dt}=0} \tag{21}$$

【証明】 (20)の固有値が時間によるとして$\lambda(t)$と書くと，(20) が成り立つとき

$$\det\{L(t)-\lambda(t)I\}=0 \tag{22}$$

である．ただしここでIは単位行列 ($I_{ii}=1$, $I_{ij}=0$ $(i\neq j)$) である．(13) により

$$0 = \det\{U(t)L(0)U^{-1}(t) - \lambda(t)U(t)U^{-1}(t)\}$$
$$= \det[U(t)\{L(0) - \lambda(t)I\}U^{-1}(t)] \tag{23}$$

ここで行列の積 AB の行列式は行列式の積に等しい（$\det(AB) = \det A \cdot \det B$）という公式を用いれば，(23) から

$$\det\{L(0) - \lambda(t)I\} = 0 \tag{24}$$

を得る．これを $t=0$ における式

$$\det\{L(0) - \lambda(0)I\} = 0 \tag{25}$$

と比べれば

$$\lambda(t) = \lambda(0) \tag{26}$$

を得る．

保 存 量

$N \times N$ 行列 $L(t)$ は N 個の固有値をもつ．これらは

$$\det\{L(t) - \lambda I\} = 0 \tag{27}$$

あるいは

$$\lambda^N + C_1\lambda^{N-1} + C_2\lambda^{N-2} + \cdots + C_{N-1}\lambda + C_N = 0 \tag{28}$$

の N 個の根である．前節でわかったように，これらの根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ は時間によらない量，すなわち保存量であり，たがいに独立である．

ここで扱っているのは N 個の粒子から成る周期系であるから $2N$ 個の自由度をもつ．このように自由度 $2N$ のハミルトン力学系が N 個の独立な保存量をもつとき，その運動は積分法によって解くことができる（リゥヴィル (Liouville) の定理）．したがってこの非線形格子は積分可能系である．

なお (28) の $C_1, C_2, \cdots, C_N$ は a_n, b_n を通して時間の関数であるが，根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ に対して

$$\lambda_1{}^N + C_1\lambda_1{}^{N-1} + C_2\lambda_1{}^{N-2} + \cdots + C_{N-1}\lambda_1 + C_N = 0$$
$$\lambda_2{}^N + C_1\lambda_2{}^{N-1} + C_2\lambda_2{}^{N-2} + \cdots + C_{N-1}\lambda_2 + C_N = 0$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\lambda_N{}^N + C_1\lambda_N{}^{N-1} + C_2\lambda_N{}^{N-2} + \cdots + C_{N-1}\lambda_N + C_N = 0 \tag{29}$$

を $C_1, C_2, \cdots, C_N$ について解いたとするとこれらは $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ の関数として与え

られる．$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ は保存量であるから，$C_1, C_2, \cdots, C_N$ も保存量であることになる．すなわち

$$C_j(\{a_n, b_n\}) = \text{一定} \qquad (j=1, 2, \cdots, N) \tag{30}$$

これは $\{a_n, b_n\}$ を含む保存量を表す．

【例】 $N=3$ のとき

$$\det(L-\lambda I) = \begin{vmatrix} b_1-\lambda & a_1 & a_3 \\ a_2 & b_2-\lambda & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) \tag{31}$$

と書けるわけである．根と係数の間の関係から

$$\lambda^2 \text{ の係数}：\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = b_1+b_2+b_3 = -C_1$$
$$\lambda^1 \text{ の係数}：\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 = b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1-a_1^2-a_2^2-a_3^2 = C_2 \tag{32}$$
$$\lambda^0 \text{ の係数}：\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = b_1b_2b_3-b_1a_2^2-b_2a_3^2-b_3a_1^2+2a_1a_2a_3 = -C_3$$

を得る．ここで粒子の全運動量は $P=\sum_{n=1}^{3} P_n = 2\sum_{n=1}^{3} b_n$ であるから $C_1=$一定は全運動量の保存を表す．すなわち

$$P = 2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \tag{33}$$

また λ^2 の係数の2乗から λ^1 の係数の2倍をひけば全エネルギー H の半分になる．すなわち

$$H = \sum_n \frac{1}{2}P_n^2 + \sum_n e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$$
$$= 2\sum_n (b_n^2+2a_n^2)$$
$$= 2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) = 2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+4(a_1^2+a_2^2+a_3^2) \tag{34}$$

λ^0 の係数 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ はふつうの力学系にない保存量である．

Tea Time

保存量

物理的科学においては保存量はきわめて大きな役割を示している．質量の保存，エネルギーの保存，電荷の保存等々は物理学の大法則である．保存則に反することは「物理的に不可能である」と断言される．科学の根本は自然の限りない現象（森羅万象）の中に保存される存在，保存される量を見出すことであると考えたくなるくらいである．これを裏返していえば，物理的科学の外の現象では保存されるものはおそらくほとんどないということを意味しているようである．『平家物語』にあるように諸行無常である．栄えるものもあるし亡びるものもある．雲は空に生じ，虫けらはあくたに湧く．

森には妖精などが，山には人格神が住んでいて万物の生成も消滅も支配していると思われていた時代は案外最近まで続いていたし，今でも風習に影を落としている．物質が不滅であることがはっきりしたのはラヴォアジエが質量保存の法則を確立してからで，わずか200年ほど前のことである．虫などは湧くものでないことを証明したのはパスツールで，わずか100年ほど前のことである．エネルギーというやや抽象的な保存量があることが明らかにされたのもわずか150年前であるが，エネルギー保存の法則が確立されたときに，物理学は大きな自信をもつようになったといってよいであろう．これを契機として物理学は大きく前進し，熱力学，電磁気学などが完成された．

さて力学系において自由度をfとすると，運動は座標と運動量の$2f$次元の位相空間内の軌道で表される．もしもf個の保存量（積分）が求まれば，この力学系は解ける（本文参照）．一様な戸田格子（1次元）では粒子数Nがそのまま自由度であり（$f=N$），本文で明らかにしたようにN個の保存量があるから可積分系である（質量の違う粒子（不純物）があれば一般に積分不可能になる）．

第16講で示すようにKdV方程式を戸田格子の連続体近似と考えれば，戸田方程式が可積分なことからKdV方程式も可積分系であることは納得できる．

しかしKdV方程式を初めから連続体とすると自由度は無限大であり，他方でKdV方程式は無限の個数の保存量をもつが，自由度の数の無限大と保存量の数の無限大の大きさの関係はまったく不明である．したがってKdV方程式が無数の保存量をもつからといって，これだけではKdV方程式は可積分系であるとい

いきれない．しかし事実上 KdV 方程式は可積分なのである．

質量，運動量，角運動量，エネルギーなどはわかりやすい保存量であるが，KdV 方程式や戸田格子のもつ高次の保存量はこれらの体系に特有なもので，直観的に理解できない．これらは多次元の位相空間の中において軌道が乗っている超曲面を表すにすぎない．保存量が十分にある場合，すなわち可積分な体系では，保存量を表す一般に多数の超曲面の交線が軌道を与える．

運動の恒量である保存量が足りない体系は積分不可能で一般にカオス的運動をたどる．このような体系は初期条件が無限小でも異なると，時間がたつうちにまったく違った軌道をたどることになるから，実際上予測不能な体系である．そのような体系の将来の経過を予測することはできないわけである．ニュートン力学を推し進めたラプラス（Laplace）は現在の状態を完全に知り，完全な計算で将来を予測できる超能力の知性（ラプラスのデモン）を考えた．しかし今では圧倒的に多数の力学系がカオス的であることがわかっているから，ラプラスの考えたような知性は物理的に存在不可能であるということになる．

保存されない物理量でもたいへん重要なものがある．エントロピーはそのもっとも代表的なもので，孤立系のエントロピーは減少することがなく，変化が起こればエントロピーは一般に必ず増大する．保存量に慣れ親しんでいる物理の世界の人たちの多くにとって，このように一方向に変化する量は付き合いにくい感じがするが，エントロピー増大の定理は物理学の大原則である．これは物理学に限られない宇宙の大原則であって，他の物理学の法則はすべていつか書き変えられる運命にあるとしても，エントロピーの法則だけは物理学を超えて生き延びるだろうという人もある．たしかに生命や社会などに関係する現象を考えるうえでこの法則は基本的な原理として浮かび上がってくる．

しかしエントロピーの法則はマクロな現象に対する法則で，ミクロな世界では物理的な保存量が基本的であるとも考えられる．物理学者はこの信念に導かれて，対称性とか，ゲージ不変などの保存則によりどころを求めている．

考えてみれば，われわれの宇宙は保存されるものかとか，あるいは物理法則は不変でありうるか，などという疑問がある．こういう疑問に対して答えたいと思っても，これについて考える地球上の知的生物，すなわち人類の存在しうる時間はあまりにも短かすぎるかもしれない．

第14講

格子に対するゲルファント-レビタンの方程式

—テーマ—

- ◆ 逆散乱法
- ◆ ゲルファント-レビタンの方程式
- ◆ Tea Time: 方程式と直観

格子に対する散乱問題

すでに述べたように演算子 L の固有値 λ が時間によらないとき，すなわち

$$L\varphi=\lambda\varphi, \qquad \frac{d\lambda}{dt}=0 \tag{1}$$

であり，φ の時間変化が

$$\frac{d\varphi}{dt}=B\varphi \tag{2}$$

で与えられるならば，L の時間変化は

$$L_t=BL-LB \tag{3}$$

で与えられる．格子の場合には（1），（2）は

$$\begin{aligned}(L\varphi)_n&=a_{n-1}\varphi(n-1)+b_n\varphi(n)+a_n\varphi(n+1)=\lambda\varphi(n)\\ \frac{d\varphi(n)}{dt}&=a_{n-1}\varphi(n-1)-a_n\varphi(n+1)\end{aligned} \tag{4}$$

である．ここで

$$a_n=\frac{1}{2}e^{-(Q_{n+1}-Q_n)/2}$$
$$b_n=\frac{1}{2}\frac{dQ_n}{dt} \tag{5}$$

(3) を計算すると格子の運動方程式

$$\frac{da_n}{dt}=a_n(b_n-b_{n+1})$$
$$\frac{db_n}{dt}=2(a_{n-1}^2-a_n^2) \tag{6}$$

が与えられる.

運動がないときは $a_n=1/2$, $b_n=0$ なので (4) は

$$(L\varphi)_n=\frac{1}{2}\{\varphi(n-1)+\varphi(n+1)\}=\frac{z^{-1}+z}{2}\varphi(n), \qquad \lambda=(z^{-1}+z)/2 \tag{7}$$

となり，したがって C を定数として

$$\varphi(n)=Cz^{\pm n} \tag{8}$$

となる. 以下 $\varphi(n)=Cz^n$ の場合について考える.

運動があるとき

$$\boxed{\varphi(n)=K_n\{z^n+\kappa(n,n+1)z^{n+1}+\kappa(n,n+2)z^{n+2}+\cdots\}} \tag{9}$$

とおいて (4) に入れ，$z^{n-1}, z^n, \cdots$ の係数を比べて

$$a_{n-1}K_{n-1}=\frac{1}{2}K_n$$
$$a_{n-1}K_{n-1}\kappa(n-1,n)+b_nK_n=\frac{1}{2}K_n\kappa(n,n+1)$$
$$\cdots \qquad\qquad \cdots \qquad \cdots \tag{10}$$

したがって

$$\boxed{\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{2}\frac{K_{n+1}}{K_n} \\ b_n&=-\frac{1}{2}\kappa(n-1,n)+\frac{1}{2}\kappa(n,n+1)\end{aligned}} \tag{11}$$

を得る.

格子に対するゲルファント-レビタンの方程式

ゲルファント-レビタンの方程式は格子の場合

$$\kappa(n,m)+F(n+m)+\sum_{n'=n+1}^{\infty}\kappa(n,n')F(n'+m)=0 \qquad (n<m)$$
$$\frac{1}{K_n^{\,2}}=1+F(2n)+\sum_{n'=n+1}^{\infty}\kappa(n,n')F(n'+n)=0 \tag{12}$$

と書ける．ソリトン解の場合に限れば，N個のソリトンを特徴づけるパラメタを$z_1, z_2, \cdots, z_N$として，方程式 (12) の核$F(m)$は

$$F(m)=\sum_{j=1}^{N} c_j(t)^2 z_j{}^m \tag{12'}$$

である（ソリトン以外の運動があるときは（4）の右辺にそのための項が付け加わる）．ここで$c_j(t)$はtだけの関数である．

多くのテキストでは散乱の式（1），（2）からゲルファント-レビタンの方程式 (12) を導いているが，本書ではゲルファント-レビタンの方程式 (12) から（1），（2）を導くことにより，この方程式が波動場a_n, b_nを与えることを示そうと思う．以下の議論は第9講でKdV方程式のゲルファント-レビタンの方程式について述べたところとまったく平行なので，第9講を参考にしてほしい．

$$\kappa(n,m)=-\sum_{j=1}^{N} c_j(t)\zeta_j(n,t)z_j{}^m \tag{13}$$

とおくと (12) から

$$\sum_{j=1}^{N} c_j(t)z_j{}^m\left\{-\zeta_j(n,t)+c_j(t)z_j{}^n-\sum_{k=1}^{N} c_j(t)c_k(t)\frac{(z_jz_k)^{n+1}}{1-z_jz_k}\zeta_k(n,t)\right\}=0 \tag{14}$$

となる．ここでmは任意であるから上式は

$$\zeta_j(n,t)+\sum_{k=1}^{N} c_j(t)c_k(t)\frac{(z_jz_k)^{n+1}}{1-z_jz_k}\zeta_k(n,t)=c_j(t)z_j{}^n$$
$$(j=1,2,\cdots,N) \tag{15}$$

を与える．これがこの場合のゲルファント-レビタンの方程式である．

束縛状態の波動関数

ここで

$$\boxed{\varphi_j(n,t)=K_n\zeta_j(n,t)} \tag{16}$$

とおくと

$$L\varphi_j(n,t)=\frac{z_j^{-1}+z_j}{2}\varphi_j(n,t) \tag{17}$$

となることが示される．$\varphi_j(n,t)$ は束縛状態の波動関数を意味する（第9講参照）．

【証明】 (15) を $n-1$, n, $n+1$ に対して書くと

$$\begin{aligned}
&\zeta_j(n-1)+\sum_k c_jc_k\frac{(z_jz_k)^n}{1-z_jz_k}\zeta_j(n-1)-c_jz_j^{n-1}=0\\
&\zeta_j(n)+\sum_k c_jc_k\frac{(z_jz_k)^{n+1}}{1-z_jz_k}\zeta_j(n)-c_jz_j^{n}=0\\
&\zeta_j(n+1)+\sum_k c_jc_k\frac{(z_jz_k)^{n+2}}{1-z_jz_k}\zeta_j(n+1)-c_jz_j^{n+1}=0
\end{aligned} \tag{18}$$

この第1式に $a_{n-1}K_{n-1}$，第2式に $\{b_n-(z_j^{-1}+z_j)/2\}K_n$，第3式に a_nK_{n+1} をかけて加えると，(4)，(11) を用い整理して

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(L-\frac{z_j^{-1}+z_j}{2}\right)\varphi_j\right\}_n+\sum_k c_jc_k\frac{(z_jz_k)^{n+1}}{1-z_jz_k}\left\{\left(L-\frac{z_k^{-1}+z_k}{2}\right)\varphi_k\right\}_n\\
&\quad+c_jz_j^{n+1}\frac{K_n}{2}\left[\left\{1+\sum_{k=1}^{N}c_kz_k^n\zeta_k(n)\right\}\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{K_{n+1}}{K_n}\right)^2\left\{1+\sum_{k=1}^{N}c_kz_k^{n+1}\zeta_k(n+1)\right\}\right]=0
\end{aligned} \tag{19}$$

を得る．

ここで (12) の第2式と (13) から

$$\boxed{\frac{1}{K_n^2}=1+\sum_{k=1}^{N}c_kz_k^n\zeta_k(n)} \tag{20}$$

したがって

$$\left(\frac{K_{n+1}}{K_n}\right)^2=\frac{1+\sum_k c_k z_k{}^n\zeta_k(n)}{1+\sum_k c_k z_k{}^{n+1}\zeta_k(n+1)} \tag{21}$$

を得るので，(19) は

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\delta_{jk}+\sum_{k=1}^{N}c_jc_k\frac{(z_jz_k)^{n+1}}{1-z_jz_k}\right\}\left\{\left(L-\frac{z_k{}^{-1}+z_k}{2}\right)\varphi_k\right\}_n=0 \tag{22}$$

となる．したがって行列

$$\{A(n)\}_{jk}=\delta_{jk}+\sum_{k=1}^{N}c_jc_k\frac{(z_jz_k)^{n+1}}{1-z_jz_k} \tag{23}$$

の逆行列を (22) の左からかければ

$$\left\{\left(L-\frac{z_k{}^{-1}+z_k}{2}\right)\varphi_k\right\}_n=0 \tag{24}$$

すなわち (17) を得る．

波動関数

波動関数を

$$\boxed{\varphi(n)=K_n\left\{z^n-\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j(t)\,(zz_j)^{n+1}}{1-zz_j}\zeta_j(n,t)\right\}} \tag{25}$$

とすると，これは（4）の第1式，すなわち

$$\boxed{(L\varphi)_n=\frac{z^{-1}+z}{2}\varphi(n)} \tag{26}$$

を満たすことが示される．

【証明】（4）を参照して少し長い計算をすると

$$\left\{\left(L-\frac{z^{-1}+z}{2}\right)\varphi\right\}_n=\Sigma\frac{c_j(zz_j)^{n+1}}{1-zz_j}\left(L-\frac{z_j{}^{-1}+z_j}{2}\right)K_n\zeta_j(n)$$
$$+\frac{K_n}{2}z^{n+1}\left[-\left\{1+\sum_{j=1}^{N}c_jz_j{}^n\zeta_j(n)\right\}+\left(\frac{K_{n+1}}{K_n}\right)^2\{1+\Sigma c_jz_j{}^{n+1}\zeta_j(n+1)\}\right] \tag{27}$$

を得る．ここで右辺第1項は (17) によって0であり，(21) を考慮すれば第2項と第3項は打ち消し合う．したがって

$$\left\{\left(L-\frac{z^{-1}+z}{2}\right)\varphi\right\}_n=0 \tag{28}$$

すなわち (26) を得る. ∎

逆散乱法の適用

次に (17) を証明したのと似た方法により (16) の $\varphi_j(n,t)$ が

$$\frac{d}{dt}\varphi_j(n,t)=a_{n-1}\varphi_j(n,t)-a_n\varphi_j(n+1,t) \tag{29}$$

を満たすことが示される (証明は省略する).

さらに (25) に因子 $C(t)$ を付けて

$$\varphi(n,t)=K_n\left\{z^n-\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j(t)\,(zz_j)^{n+1}}{1-zz_j}\zeta_j(n,t)\right\}C(t) \tag{30}$$

とし

$$C(t)=e^{\beta t},\qquad \beta=\frac{z^{-1}-z}{2} \tag{30'}$$

$$c_j(t)=c_j(0)\,e^{\beta_j t},\qquad \beta_j=\frac{z_j^{-1}-z_j}{2}=\sinh\kappa_j \tag{30''}$$

とおく. このとき (30) の $\varphi(n,t)$ が (4) の第1式, あるいは (26) を満たすのは当然である. しかも (29) を用いることにより, この $\varphi(n,t)$ が (4) の第2式, すなわち

$$\frac{d}{dt}\varphi(n,t)=a_{n-1}\varphi(n-1,t)-a_n\varphi(n+1,t) \tag{31}$$

を満たすことが示される (証明は略す).

これにより (30) の $\varphi(n,t)$ は

$$L\varphi=\lambda\varphi,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=B\varphi \tag{32}$$

を満たし, したがってゲルファント-レビタンの方程式 (15) は格子の運動方程式 (3) あるいは (6) と同等であることがわかる.

逆散乱法を適用するには，まず$t=0$における波動場$a_n(0)$，$b_n(0)$に対する$\varphi(n,0)$を（4）から求め，これを（30）で$t=0$とおいた式と比べてz_jと$c_j(0)$を定める．次に（30′）により$c_j(t)$が決まるから，これを用いてゲルファント-レビタンの式（15）を解いて得られる$\zeta_j(n,t)$と（20）で与えられるK_nを用いれば，（11）により任意の時刻の波動場a_n, b_nが与えられる．

しかし実際にはこのような過程を経て初期値問題を解くことは行われない．本書でも初めからz_jと$c_j(0)$（$j=1,2,\cdots,N$）が与えられたものとしてNソリトン解を導くところだけを次講で示すことにする．

Tea Time

方程式と直観

1つの質点に力がはたらいているときのニュートンの運動方程式のように簡単な運動方程式ならば，それを数学的に解かなくても，結果を定性的に想像することができる．しかしこれも簡単な運動方程式を解いた経験が何度もあるからではないだろうか．一般に方程式を与えられたとき，それを解かない限り定性的にでも結果を予測することはむずかしい．これはたいへんなさけないことである．できれば方程式をみただけで，その結果の運動などを的確に知る直観をもちたいものである．科学の簡単な法則に従う世界が，その法則から想像もつかないような多様な自然の営みをみせてくれるのは驚くべきことである．自然の示す多様なスペクタクルが簡単な自然法則の結果であるとはとても信じられないくらいである．

自然法則を熟知したすぐれた知性があったとしても，「もしも地球を訪問したことがなかったとすれば，雷雨，火山，大洋の波，オーロラ，色彩に満ちた日没を予想することができたであろうか」（この文章の後半は物理学者のR.ファインマンによる）．ファインマンは次のようにも述べている（『ファインマン物理学IV 電磁波と物性』戸田訳）．

「人類の知能の次の大きな発展の時代には，方程式の**定性的な**内容を理解する方法が生じるかもしれない．現在のわれわれには不可能である．現在では水の流

れの方程式が，2つの回転する円筒の間の乱流によってできる理髪店の看板のあめ棒のような構造などを含んでいることを予想できない．現在ではわれわれはシュレーディンガー方程式が蛙や作曲家や道徳を含んでいるか，あるいは含んでいないかを見抜くことができない．これを越える神のようなものを必要とするか，そうでないかということも断言できない．そこで，どちらでも強く主張しうるのである」．

第15講

格子の N ソリトン解

—テーマ—

- ◆ 束縛状態の波動関数 $\zeta_i(n,t)$
- ◆ N ソリトン解
- ◆ Tea Time: カチカチボール

ソリトン解

前講で述べたように，格子の N ソリトン解は次のようにして求めることができる．まず

$$\zeta_i(n,t)+\sum_{j=1}^{N} c_i(t)c_j(t)\frac{(z_iz_j)^{n+1}}{1-z_iz_j}\zeta_j(n,t)=c_i(t)z_i{}^n$$
$$c_j(t)=c_j(0)e^{\beta_j t},\qquad \beta_j=\frac{z_j{}^{-1}-z_j}{2}\qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{1}$$

を解いて $\zeta_i(n,t)$ を求める（KdV 方程式の場合，ζ_i に相当するのは第9講でみたように，KdV 方程式に付随するシュレーディンガー方程式の束縛状態の波動関数であり，格子の場合も同様な解釈ができる）．$\zeta_i(n,t)$ が求められると第14講 (27) により

$$\frac{1}{K_n{}^2}=1+\sum_{j=1}^{N} c_j(t)\zeta_j(n,t)z_j{}^n \tag{2}$$

とおいて，格子の運動は

$$e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}=\left(\frac{K_{n+1}}{K_n}\right)^2 \tag{3}$$

で与えられる.

【1ソリトン解】　まず1ソリトン解を確かめておこう. この場合（1）は

$$\zeta(n,t)+c_1(t)^2\frac{{z_1}^{2(n+1)}}{1-{z_1}^2}\zeta(n,t)-c_1(t){z_1}^n=0 \tag{4}$$

すなわち

$$\zeta(n,t)=\frac{c_1(t){z_1}^n}{1+\dfrac{{c_1}^2(t){z_1}^{2(n+1)}}{1-{z_1}^2}} \tag{5}$$

これから

$$\frac{1}{{K_n}^2}=\frac{1+\alpha{z_1}^{2n}}{1+\alpha{z_1}^{2(n+1)}} \tag{6}$$

ただし

$$\alpha=\frac{c_1(t)^2}{1-{z_1}^2} \tag{7}$$

とおいた. したがって（3），（6）により

$$\begin{aligned}e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}-1&=\frac{1+\alpha{z_1}^{2n}}{1+\alpha{z_1}^{2(n+1)}}\ \frac{1+\alpha{z_1}^{2(n+2)}}{1+\alpha{z_1}^{2(n+1)}}-1\\&=\frac{\alpha({z_1}^{2n}-2{z_1}^{2(n+1)}+{z_1}^{2(n+2)})}{(1+\alpha{z_1}^{2(n+1)})^2}\\&=\frac{({z_1}^{-1}-z_1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}{z_1}^{-(n+1)}+\sqrt{\alpha}{z_1}^{n+1}\right)^2}\\&=\beta^2\operatorname{sech}^2(kn-\beta t+\delta)\end{aligned} \tag{8}$$

となる. ただしここで

$$\begin{aligned}z_1&=e^{-k}\\\sqrt{\alpha}z_1&=\frac{c(0)z_1}{\sqrt{1-{z_1}^2}}=e^{\delta}\end{aligned} \tag{9}$$

とおいた.

Nソリトン解

Nソリトン解は

$$S_n=\log\det A(n) \tag{10}$$

で与えられる．ここで $A(n)$ は (ij) 成分が

$$\{A(n)\}_{ij}=\delta_{ij}+c_i(t)\,c_j(t)\,\frac{(z_iz_j)^{n+1}}{1-z_iz_j} \tag{11}$$

である行列を意味する．このとき

$$s_n=\frac{dS_n}{dt} \tag{12}$$

と書けば，運動量 $P_n=dQ_n/dt$ は（第 11 講（14）参照）

$$P_n=s_{n-1}-s_n \tag{13}$$

で与えられ，運動は（3），あるいは

$$e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}-1=\frac{d^2}{dt^2}S_n \tag{14}$$

でも与えられる（第 11 講（5），(13) 参照）．

【証明】（1）は N 個の $\zeta_i(n,t)$ に関する線形連立方程式であり，解はクラメル (Cramer) の式

$$\zeta_j(n,t)=\frac{\det A(n)^{(j)}}{\det A(n)} \tag{15}$$

で与えられる．ここで $A(n)^{(j)}$ は行列式 $\det A(n)$ の j 列を（1）の右辺，すなわち $\{c_1(t)z_1^n, c_2(t)z_2^n, \cdots, c_N(t)z_N^n\}^T$ で置き換えた行列である．たとえば

$$\det A(n)^{(1)}=\begin{vmatrix} c_1(t)z_1^n & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ c_2(t)z_2^n & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_N(t)z_N^n & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{vmatrix} \tag{16}$$

$$\det A(n)^{(2)}=\begin{vmatrix} A_{1\,1} & c_1(t)z_1{}^n & \cdots & A_{1\,N} \\ A_{2\,1} & c_2(t)z_2{}^n & \cdots & A_{2\,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N\,1} & c_N(t)z_N{}^n & \cdots & A_{N\,N} \end{vmatrix}$$

である.

他方で

$$\{A(n-1)\}_{ij}-\{A(n)\}_{ij}=c_i(t)c_j(t)\,(z_iz_j)^n \tag{17}$$

したがって

$$\det A(n-1)=\det\left[\{A(n)\}_{ij}+c_i(t)z_i{}^nc_j(t)z_j{}^{(n)}\right]$$

$$=\begin{vmatrix} A_{1\,1}+c_1z_1{}^nc_1z_1{}^n & A_{1\,2}+c_1z_1{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \\ A_{2\,1}+c_2z_2{}^nc_1z_1{}^n & A_{2\,2}+c_2z_2{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N\,1}+c_Nz_N{}^nc_1z_1{}^n & A_{N\,2}+c_Nz_N{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} A_{1\,1} & A_{1\,2}+c_1z_1{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \\ A_{2\,1} & A_{2\,2}+c_2z_2{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N\,1} & A_{N\,2}+c_Nz_N{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \end{vmatrix}+c_1z_1{}^n\begin{vmatrix} c_1z_1{}^n & A_{1\,2}+c_1z_1{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \\ c_2z_2{}^n & A_{2\,2}+c_2z_2{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_Nz_N{}^n & A_{N\,2}+c_Nz_N{}^nc_2z_2{}^n & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} A_{1\,1} & A_{1\,2} & \cdots \\ A_{2\,1} & A_{2\,2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}+c_2z_2{}^n\begin{vmatrix} A_{1\,1} & c_1z_1{}^n & \cdots \\ A_{2\,1} & c_2z_2{}^n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}+c_1z_1{}^n\begin{vmatrix} c_1z_1{}^n & A_{1\,2} & \cdots \\ c_2z_2{}^n & A_{2\,2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\det A(n)+c_1z_1{}^n\begin{vmatrix} c_1z_1{}^n & A_{1\,2} & A_{1\,3} \\ c_2z_2{}^n & A_{2\,2} & A_{2\,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}+c_2z_2{}^n\begin{vmatrix} A_{1\,1} & c_1z_1{}^n & \cdots \\ A_{2\,1} & c_2z_2{}^n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}+\cdots\cdots$$

$$=\det A(n)+\sum_{j=1}^{N}c_jz_j{}^n\det A(n)^{(j)}$$

$$=\det A(n)\left\{1+\sum_{j=1}^{N}c_jz_j{}^n\zeta_j(n)\right\} \tag{18}$$

したがって

$$\frac{\det A(n-1)}{\det A(n)}=1+\sum_{j=1}^{N}c_jz_j{}^n\zeta_j(n) \tag{19}$$

また第14講 (20) により

$$\frac{1}{K_n{}^2}=1+\sum_{j=1}^{N}c_jz_j{}^n\zeta_j(n) \tag{20}$$

なので

$$\boxed{\frac{1}{K_n^2}=\frac{\det A(n-1)}{\det A(n)}} \tag{21}$$

よって（3）により

$$\boxed{e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}=\frac{\det A(n+1)\ \det A(n-1)}{\{\det A(n)\}^2}} \tag{22}$$

を得る．

(22) と第11講 (13) 式

$$Q_n=S_{n-1}-S_n \tag{23}$$

を比べると

$$S_n=\log\det A(n)+(n\text{ の1次式}) \tag{24}$$

この式の右辺で（n の1次式）は無視してもよい．また (23) を t で微分すれば $P_n=s_{n-1}-s_n$ を得る．(10) を用いれば解は (14) でも与えられる． ∎

$$s_n=-\kappa(n,n+1)$$

簡単のため $A(n)$ が 2×2 行列の場合を詳しく書くと

$$\det A(n)=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{c_1^2z_1^{2(n+1)}}{1-z_1^2} & \dfrac{c_1c_2(z_1z_2)^{n+1}}{1-z_1z_2} \\ \dfrac{c_2c_1(z_2z_1)^{n+1}}{1-z_2z_1} & 1+\dfrac{c_2^2z_2^{2(n+1)}}{1-z_2^2} \end{vmatrix} \tag{25}$$

である．時間 t で微分するとき

$$\frac{d}{dt}c_i(t)=\beta_ic_i=\frac{z_i^{-1}-z_i}{2}c_i$$

であることを考慮すれば

$$\frac{d}{dt}\ \frac{c_2c_1(z_2z_1)^{n+1}}{1-z_2z_1}=\frac{z_2^{-1}-z_2+z_1^{-1}-z_1}{2}\ \frac{c_2c_1(z_2z_1)^{n+1}}{1-z_2z_1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}\right)c_2c_1(z_2z_1)^{n+1} \tag{26}$$

なので

$$\frac{d}{dt}\det A(n)=\begin{vmatrix} c_1^2 z_1^{2n+1} & \dfrac{c_1c_2(z_1z_2)^{n+1}}{1-z_1z_2} \\ \dfrac{c_2c_1}{2}(z_2^n z_1^{n+1}+z_2^{n+1}z_1^n) & 1+\dfrac{c_2^2 z_2^{2(n+1)}}{1-z_2^2} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1+\dfrac{c_1^2 z_1^{2(n+1)}}{1-z_1^2} & \dfrac{c_1c_2}{2}(z_1^n z_2^{n+1}+z_1^{n+1}z_2^n) \\ \dfrac{c_2c_1(z_2z_1)^{n+1}}{1-z_2z_1} & c_2^2 z_2^{2n+1} \end{vmatrix}$$

$$=c_1z_1^{2n+1}\left(1+\frac{c_2z_2^{2(n+1)}}{1-z_2^2}\right)+c_2z_2^{2n+1}\left(1+\frac{c_1^2z_1^{2(n+1)}}{1-z_1^2}\right)$$

$$-c_1^2c_2^2\frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}(z_1z_2)^{2n+1}$$

$$=\{c_1z_1^{n+1}\zeta_1(n)+c_2z_2^{n+1}\zeta_2(n)\}\det A(n) \tag{27}$$

を得る．ここで最後の式では

$$\zeta_1(n)=\frac{\det A(n)^{(1)}}{\det A(n)}=\frac{1}{\det A(n)}\begin{vmatrix} c_1z_1^n & \dfrac{c_1c_2(z_1z_2)^{n+1}}{1-z_1z_2} \\ c_2z_2^n & 1+\dfrac{c_2^2z_2^{2(n+1)}}{1-z_2^2} \end{vmatrix}$$

$$\zeta_2(n)=\frac{\det A(n)^{(1)}}{\det A(n)}=\frac{1}{\det A(n)}\begin{vmatrix} 1+\dfrac{c_1^2z_1^{2(n+1)}}{1-z_1^2} & c_1z_1^n \\ \dfrac{c_2c_1(z_2z_1)^{n+1}}{1-z_2z_1} & c_2z_2^n \end{vmatrix} \tag{28}$$

を用いた．

このようにして一般に

$$\frac{d}{dt}\log\det A(n)=s_n=\sum_{j=1}^{N}c_j\zeta_j(n)z_j^{n+1} \tag{29}$$

あるいは第14講（13）により

$$s_n=-\kappa(n,n+1)$$

したがって（13）は

$$P_n=-\kappa(n-1,n)+\kappa(n,n+1) \tag{30}$$

と書け，第14講（11）の第2式が再び得られた．

Tea Time

カチカチボール

図36において，…，$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ と粒子が並んでいる．そのうちで P_1, P_2, P_3 が図のように動き，衝突して P_1', P_2', P_3' へと向かう（縦軸は時間である）．戸田格子の中の一部の粒子に運動が与えられたとき，粒子の運動はこれに似たものになる．粒子はたがいに指数関数的な力で反発し合う．初期の P_1, P_2, P_3 の運動量（遠くから集まってくる）は最終の P_3', P_2', P_1' の運動量（たがいに離れていく）にそれぞれ等しく，これらは運動の恒量（保存量）である．

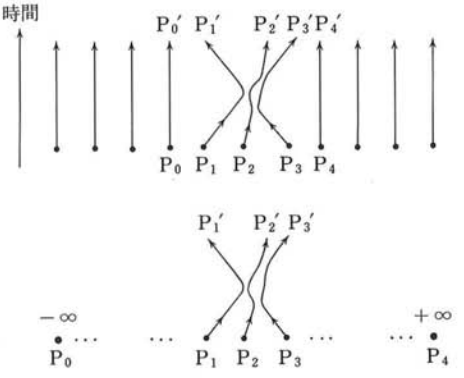


図36

図36(b)のように P_0 が左方 $-\infty$ の位置に，P_4 が右方 $+\infty$ の距離にあるときは，P_1, P_2, P_3 はたがいの衝突をした後，他の粒子と衝突することなく P_1', P_2', P_3' の運動をする．この場合，戸田ポテンシャル $(a/b)e^{-br}+ar$ の第2項は $-\infty$ と $+\infty$ に P_0 と P_4 があれば，中間の粒子 P_1, P_2, P_3 に影響を与えないのである．

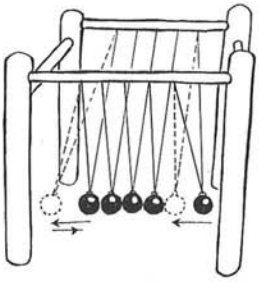


図37

P_1, P_2, P_3 がおはじきの玉だとし，これらにそれぞれ運動を与えたものとみてもよい．

$\pm\infty$ にある P_0, P_4 がないときは，P_1', P_2', P_3' はたがいに離れていってからたがいの間にはたらく引力（ar の項による力）のために近寄ってきてまた衝突する．

そのようすはいわゆるカチカチボール（図37）に似ている．玉の衝突はいずれの場合でもソリトンの衝突とみることができる．

このカチカチボールの実際の運動では，別のおもしろい現象がみられる．はじ

めに1個あるいは2個の球だけに運動を与えると，やがてすべての球の運動がそろってきて，ついには全部の球が同時に右へ左へと振れるようになるのである．それと同時に球を吊っている台全体が球の振れと同期して揺れる．

球の運動がだんだんと同期（シンクロナイズ）するのは，球の衝突が完全な弾性衝突ではないためである．不完全弾性衝突をするたびに衝突する球の速度の差は小さくなる．そのためだんだんと運動がそろうようになり，それと同時に運動のエネルギーの一部が台に移ってこれを揺らすのである．

第16講

連続体近似

—テーマ—

- ◆ 長波長に対する連続体近似
- ◆ KdV 方程式と，変形された KdV 方程式
- ◆ Tea Time: 再帰現象

長波長に対する連続体近似

KdV 方程式

$$u_t+\alpha uu_x+\beta u_{xxx}=0 \tag{1}$$

と非線形格子の運動方程式

$$\ddot{Q}_n=\exp(Q_{n-1}-Q_n)-\exp(Q_n-Q_{n+1}) \tag{2}$$

はともにソリトン解，多ソリトン解をもち，逆散乱法，ゲルファント-レビタンの方程式を使って積分することができるばかりでなく，これらの解や解決はたがいに非常によく似ている．ここでは非線形格子を伝わる波動の波長が十分長いとき，格子を連続体とみる近似，すなわち連続体近似を用いることができ，これによって格子の運動方程式から KdV 方程式が導かれることを示そう．

格子の運動方程式

$$m\frac{d^2y_n}{dt^2}=-\phi'(y_n-y_{n-1})+\phi'(y_{n+1}-y_n) \tag{3}$$

において，相互作用のポテンシャルが相対変位 $r_n=y_{n+1}-y_n$ について

$$\boxed{\phi(r)=\frac{\kappa}{2}r^2+\frac{1}{3}\kappa\alpha r^3+\frac{1}{4}\kappa\alpha_1 r^4+\cdots} \tag{4}$$

のように展開できるとする．波動 $y_n(t)$ が n について十分なめらかで

$$x=nh \tag{5}$$

（h は格子の粒子間の平均距離）の連続関数

$$y=y(x,t)=y_n(t) \tag{6}$$

として扱ってよいとしてテイラー展開

$$y_{n\pm1}=y\pm h\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\pm\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\pm\cdots \tag{7}$$

を仮定する．これを（3）に代入すると

$$c_0^{-2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\cdots\right)+\left(\varepsilon\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\cdots\right) \tag{8}$$

を得る．ここで

$$c_0=h\sqrt{\frac{\kappa}{m}},\qquad \varepsilon=2\alpha h \tag{9}$$

であり，（8）の右辺第1項だけ取れば，いわゆる波動方程式 $\partial^2y/\partial t^2=c_0^2\,\partial^2y/\partial x^2$ を得る．右辺第2項は高階の微係数を含む線形項，第3項は非線形項である．

線形項だけをとれば高階微分をどこまでで打ち切っても積分可能であるが，非線形項を残すときは一般に積分可能ではなくなる．またもしも（8）の非線形項の最初のものだけをとって

$$c_0^{-2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{10}$$

とすると，これは第6講（11）と同様に崩壊する運動を与えるので波動方程式として役立たない．

しかし，とくに高階の線形項と最低次の非線形項を1つずつ取り入れた式

$$c_0^{-2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\left(1+\varepsilon\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \tag{11}$$

は分散項と非線形項とがバランスしてソリトン解を与えることが示される．実際

$$w=\frac{\partial y}{\partial x} \tag{12}$$

とおくと (11) は

$$c_0^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}w^2+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \tag{13}$$

となる．これはブシネ (Boussinesq) の方程式と呼ばれ，浅い水の波を表す式として知られている．

ブシネの方程式は左へ進む波も右へ進む波も同様に記述する．ここで右へ進む波だけを考えると，波の速さはだいたい c_0 なので，この速さで右へ進む座標系

$$\xi=x-c_0t \tag{14}$$

に移り，時間もゆっくりした尺度に変えて

$$\tau=\frac{1}{2}\varepsilon c_0 t \tag{15}$$

を導入し

$$u=\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{16}$$

とおくと (11) は

$$-\varepsilon u_\tau+\frac{1}{4}\varepsilon^2 y_{\tau\tau}=\varepsilon u u_\xi+\frac{h^2}{12}u_{\xi\xi\xi} \tag{17}$$

となる．ここで $|\varepsilon|$ と h^2 は同程度で十分小さく

$$|\varepsilon|\sim h^2\ll 1 \tag{18}$$

であるとして，左辺第2項 $\varepsilon^2 y_{\tau\tau}$ を無視できるとすれば

$$u_\tau+uu_\xi+\frac{h^2}{12\varepsilon}u_{\xi\xi\xi}=0 \tag{19}$$

を得る．これは KdV 方程式であり，積分可能系である．

【注意】 もしも相互作用を

$$\phi(r)=\frac{1}{2}\kappa r^2+\frac{1}{4}\kappa\alpha' r^4 \tag{20}$$

とすると，同様な計算により連続体近似として（$v=\partial y/\partial\xi$, $\tau=\frac{1}{2}\varepsilon' c_0 t$, $\mu=\frac{1}{3}6\alpha'$）

$$\boxed{v_\tau+v^2v_\xi+\mu v_{\xi\xi\xi}=0} \tag{21}$$

の形の式を得る．これを変形されたKdV方程式（MKdV）という．これはソリトン解をもつ．また逆散乱法も知られているが，これはKdV方程式の場合よりも複雑である．

なお

$$u=v^2+v_x \tag{22}$$

とおくと

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+2v\right)(v_t-6v^2v_x+v_{xxx})=u_t-6uu_x+u_{xxx} \tag{23}$$

が成立する．したがってvが（1係数を別として）MKdV方程式（21）の第2項の符号を変えた式を満たすならば，uはKdV方程式$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$を満足する．（22）をミウラ変換という．

可積分変換

前節では非線形格子の運動方程式から可積分なKdV方程式を導いたが，途中で考えた非線形格子は可積分系ではなかった．

ここでは可積分な戸田格子から可積分の性質を保ちつつ，可積分なKdV方程式へ移行することができることを示そう．

戸田格子の方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1+f_n)=f_{n+1}+f_{n-1}-2f_n \tag{24}$$

と書かれる．ここでパラメタ$h(0<h\leq 1)$を導入して

$$t=\frac{\tau}{h^3},\qquad f_n=h^2u_n(\tau) \tag{25}$$

とおくと（25）は

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\log(1+h^2u_n)=\frac{1}{h^4}(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n) \tag{26}$$

となる．さらに一様な速さ $h^{-2}-h^2$ で右向きに動く座標系 x を

$$x=hn-\left(\frac{1}{h^2}-h^2\right)\tau \tag{27}$$

によって導入すると一般に

$$\frac{d}{d\tau}F\{u_n(\tau)\}=\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}-\left(\frac{1}{h^2}-h^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\right\}F\{u(x,\tau)\} \tag{28}$$

なので (20) は

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}-\left(\frac{1}{h^2}-h^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\right\}^2\log\{1+h^2u(x,\tau)\}$$

$$=\frac{1}{h^4}\{u(x+h,\tau)+u(x-h,\tau)-2u(x,\tau)\} \tag{29}$$

となる．

(29) において $h=1$ とすれば戸田格子に戻る．$0<h\leq 1$ の領域で (29) は戸田格子に尺度変換 (25) と座標変換 (27) を行ったものなので，やはり可積分系である．そして $h\to 0$ の極限において (29) の左辺は

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\left(\frac{1}{h^2}-h^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\right\}^2\log\{1+h^2u(x,\tau)\}$$

$$=\left\{\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-2\left(\frac{1}{h^2}-h^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau}+\left(\frac{1}{h^2}-h^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\left(h^2u-\frac{h^4}{2}u^2+\cdots\right)$$

$$\to -2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial\tau}+\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(u^2)}{\partial x^2} \tag{30}$$

となり，同様に (29) の右辺は

$$\frac{1}{h^4}\{u(x+h,\tau)+u(x-h,\tau)-2u(x,\tau)\}$$

$$=\frac{1}{h^4}\left(h^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\cdots\right)$$

$$\to\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4u}{\partial x^4} \tag{31}$$

となる．したがって $h\to 0$ の極限では (29) は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{-2\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\right\}=\frac{1}{12}\frac{\partial^4u}{\partial x^4} \tag{32}$$

となり，ここで遠方で $u\to 0$ とすれば

$$u_\tau+\frac{1}{2}uu_x+\frac{1}{24}u_{xxx}=0$$

すなわちKdV方程式になる.

同様な計算で戸田格子に対する逆散乱法や第19講に述べるベックルント変換なども，可積分の性質を保ったままでKdV方程式に対するものへ移行することができることが示される.

Tea Time

再帰現象

フェルミたちは非線形格子の振動を計算機で調べて，ある時間がたつと初めと同じ状態に戻る現象，いわゆるFPUの再帰現象（第7講 Tea Time参照）を発見した．ザブスキーとクルスカルはこれを確かめようと，非線形格子をKdV方程式で近似することにより，ソリトンを発見し，KdV方程式の再帰現象を発見した．いまではソリトンの運動を考えることによってFPUの再帰現象(非線形格子）もKdVの再帰現象（連続体）も同様に理解することができる．ただザブスキーたちの計算は周期系であるのに対し，FPUの計算は両端が固定端であることが違い，この点ではザブスキーたちのKdV方程式の場合のほうが簡単である.

ザブスキーたちの計算では初期条件は正弦波であるとした．時間がたつと正弦波は数個のソリトンに分かれ，各ソリトンはそれぞれ違った速さで進行する．ソリトンを徒競争のランナーにたとえ，数人のランナーが円形のトラックを走る場合にたとえるとわかりやすい．初期条件で正弦波のときはランナーがスタート地点で一列に並んだ状態である．「よーいドン」でランナーはいっせいに走り出す．速いランナーは1番先にトラックを1周して2周目に入るが，そのとき他のランナーはまだ1周を終わっていない．時間がたつと速いランナーは1周遅れで走っている遅いランナーに追いつく．そうして時間がたつにつれて各ランナーが走った距離には大きな差がつくが，同じトラックの上を走っているのであるから，ある時間がたつとすべてのランナーがだいたい横一列に並ぶ瞬間もくるわけである．これが再帰現象である.

これを時計の針にたとえることもできる．秒針，分針，時針の3本の針がある

時計では，12時に同じ点をスタートしてから約1時間後の1時5分ちょっとすぎに3本の針の位置はだいたい一致する．これが時計の針の近似的再帰である．

ランナーや時計の針の代わりにおもちゃのようなレーシングカーを考えてもよい．簡単のために1周が1kmの円形の走行サーキットの上を8台の自動車が衝突しないで走ることができるとし，8台の速さを$v_1=1$ km/時，$v_2=2$ km/時，…，$v_8=8$ km/時としよう．$t=1/2$ 時間では$2n+1$番目（$n=0,1,2,\cdots$）の車は$n+1/2$周したところで横一列に並び，同時刻に$2n$番目の車はn周して横一列に並ぶ．そして$t=1$時間ですべての車がスタートラインに横一列に並ぶことになる．これが再帰である．

この再帰現象はすべての車の速さが一定値だけ変わっても同じである．すなわち再帰現象は速さの相対速度だけで決まる．たとえばすべて車の速さを5.6 km/時だけ減じて$v_1=-4.6$ km/時，$v_2=-3.6$ km/時，…，$v_5=-0.6$ km/時までは時計回りに走り，$v_6=0.4$ km/時，…，$v_8=2.4$ km/時は反時計回りに走っても1時間後にはすべての車が横一列に並ぶ．このときm番目の車は$m-5.6$周していることになる（これらの数値は実はザブスキーたちの数値計算で現れたソリトンの速さと再帰までに周期場を回った回数の数値の近似値であるが詳しいことは省略する）．

第 17 講

いくつかの非線形方程式

—テーマ—

- ◆ サイン-ゴルドン方程式
- ◆ 非線形シュレーディンガー方程式
- ◆ Tea Time: 自己集束

積分可能な発展方程式

いままでは主に KdV 方程式と戸田格子について述べてきた．KdV 方程式の解法が発見された 1967 年以後，積分できる非線形発展方程式がきわめて多数発見された．あまり多数なので主だったものを少数選ぶのもほとんど不可能であるが，よく知られているものをいくつかあげて簡単な解説を加えることにしよう．

リゥヴィルの方程式

方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=e^{\phi} \tag{1}$$

あるいは

$$s=\frac{y+t}{2}, \qquad \tau=\frac{y-t}{2} \tag{2}$$

とおいて（1）を書き直した式（$\phi_{s\tau}=\partial^2\phi/\partial s\partial\tau$）

$$\phi_{s\tau}=e^{\phi} \tag{3}$$

をリゥヴィル (Liouville) の方程式という．この方程式の一般解は任意関数 $\theta(s)$ と $\chi(\tau)$ を用いて

$$e^{\phi}=2\frac{\theta'(s)\chi'(\tau)}{\{\theta(s)+\chi(\tau)\}^2} \tag{4}$$

で与えられる．ただし $\theta'(s)=d\theta/ds$, $\chi'(\tau)=d\chi/d\tau$.

【証明】 (4) から (3) を導こう．(4) の対数をとれば

$$\phi=\log 2+\log\theta'(s)+\log\chi'(\tau)-2\log\{\theta(s)+\chi(\tau)\}$$

s で微分すれば

$$\phi_s=\frac{\theta''(s)}{\theta'(s)}-2\frac{\theta'(s)}{\theta(s)+\chi(\tau)} \tag{5}$$

さらに τ で微分して (4) を用いれば

$$\phi_{s\tau}=2\frac{\theta'(s)\chi'(\tau)}{\{\theta(s)+\chi(\tau)\}^2}=e^{\phi} \tag{6}$$

よって (3) が得られた． ∎

サイン-ゴルドン方程式

$\phi=\phi(y,t)$ として

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=\sin\phi \tag{7}$$

あるいは変換 (2) を行った式

$$\phi_{s\tau}=\sin\phi \tag{8}$$

をサイン-ゴルドン (sine-Gordon) 方程式 (SG方程式) という．符号を変え

$$\phi_{s\tau}+\sin\phi=0 \tag{9}$$

と書くこともある．

線形の場の方程式 $\phi_{xx}-\phi_{tt}=\phi$ はクライン-ゴルドン (Klein-Gordon) 方程式と呼ばれるので，(7) をサイン-ゴルドン方程式というのである．サイン-ゴルドン方程式は図 38 のように振り子をばねでつないだ模型を連続体近似したものと考えられる．ただし図のように不連続な

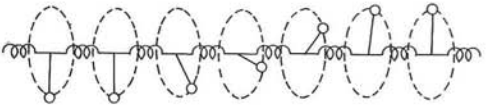


図 38

模型は可積分でないのに対し，サイン-ゴルドン方程式は可積分で詳しく研究されている．この方程式（7）は固体中の転位の伝播や，相転移に付随して起こるいくつかの現象，光パルスの非線形効果による自己透過現象，素粒子モデル，ジョセフソン接合素子中の磁束伝播の問題など，いろいろな現象を記述するのに用いられている．

（7）は特解としてキンク，反キンクと呼ばれる次式で表される解をもつ．v を任意定数として

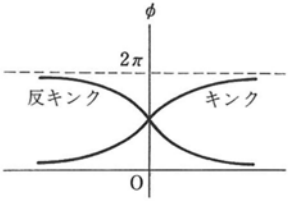


図 39

$$\phi(x,t)=4\tan^{-1}\left\{\exp\left(\pm\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right\} \qquad (|v|<1) \tag{10}$$

符号の＋はキンク，－は反キンクである（図39）．$|v|>1$ の場合も定常解

$$\phi(x,t)=4\tan^{-1}\left\{\exp\left(\pm\frac{x-vt}{\sqrt{v^2-1}}\right)\right\}+\pi \qquad (|v|>1) \tag{11}$$

がある．これらは1個のキンクあるいは反キンクソリトンを表している．

キンクと反キンク（速度$\pm v$）の衝突を表す解は

$$\phi(x,t)=\pm 4\tan^{-1}\left\{\frac{1}{v}\,\frac{\sinh\left(vt/\sqrt{1-v^2}\right)}{\cosh\left(x/\sqrt{1-v^2}\right)}\right\} \tag{12}$$

キンクとキンク，反キンクとキンクの衝突（図 40）を表す解は

$$\phi(x,t)=\pm 4\tan^{-1}\left\{v\,\frac{\sinh\left(x/\sqrt{1-v^2}\right)}{\cosh\left(vt/\sqrt{1-v^2}\right)}\right\} \tag{13}$$

である．

(13) で速度 v を純虚数 $v=\sqrt{-1}\,u$ にすると

$$\phi(x,t)=4\tan^{-1}\left\{\frac{1}{u}\,\frac{\sin\left(ut/\sqrt{1+u^2}\right)}{\cosh\left(x/\sqrt{1+u^2}\right)}\right\} \tag{14}$$

となる．これは空間的に局在した振動を表し，ブリーザー（breather）解という（図 41）．

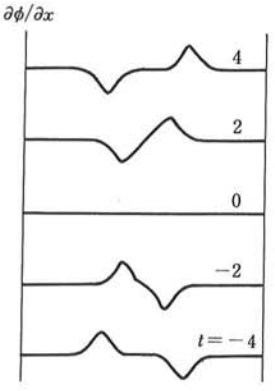


図 40

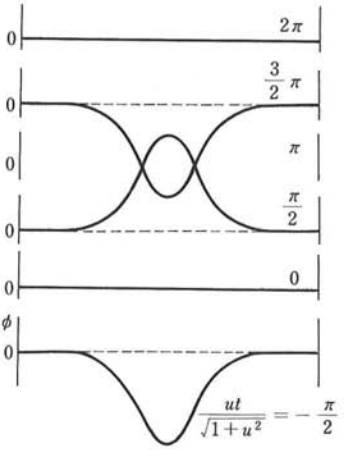


図 41

非線形シュレーディンガー方程式

$i=\sqrt{-1}$ として

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\varepsilon|\varphi|^2\varphi=0 \tag{15}$$

の形の方程式を非線形シュレーディンガー方程式（NLS 方程式）という．量子力学のシュレーディンガー方程式でポテンシャルを $-\varepsilon|\varphi|^2\varphi$ としたものに相当し，$\varepsilon>0$ のときは束縛ポテンシャルである．

$\varepsilon=1$ としたときのソリトン解は

$$\phi(x,t)=\sqrt{\rho_0}\,\mathrm{sech}\,\{\sqrt{\rho_0}(x-vt+\delta)\}\exp\left\{i\frac{v}{2}x-i\left(\frac{v^2}{4}-\rho_0\right)t\right\} \tag{16}$$

ここで速度 v は任意定数である．(15) の包絡線は孤立波の形をしているので，この解を包絡線ソリトンといっている（図 42）．

$\varepsilon=-1$ のときの解は複雑なので省略するが図 43 のようになり，包絡線は

$$|\phi(x,t)|^2=\rho_0{}^2-a^2\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\rho_0}\,a(x-vt) \tag{17}$$

で表される．これは暗いソリトン（ダークソリトン）と呼ばれている．

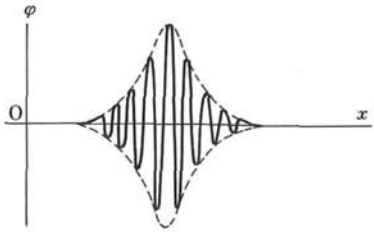


図 42

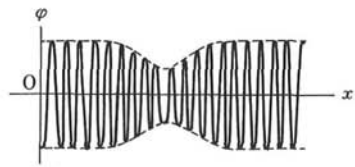


図 43

ベンジャミン-小野方程式

ベンジャミン (Benjamin)-小野方程式は深い2層流体中の内部波を記述する方程式であって

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{H}[u]=0 \tag{18}$$

ここで $\mathcal{H}$ はヒルベルト変換の演算子 (P は主値)

$$\mathcal{H}[f(x)]=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(z)}{z-x}dz \tag{19}$$

を表す．この方程式はローレンツ型の孤立波

$$u(x,t)=\frac{a\delta^2}{(x-vt)^2+\delta^2} \tag{20}$$

ただし（a は任意定数)

$$v=\frac{a\alpha}{4},\qquad \delta=\frac{4\beta}{a\alpha} \tag{20'}$$

をもつ．この形の解は衝突に対して安定であり，代数的ソリトンと呼ばれている．

変形された KdV 方程式

変形された KdV 方程式 (MKdV 方程式)

$$u_t+6u^2u_x+u_{xxx}=0 \tag{21}$$

はソリトン解

$$u(x,t)=\pm 2k\,\mathrm{sech}\,(2kx-8k^3t+\delta) \tag{22}$$

で与えられる．また複雑であるが多ソリトン解をもつ．

さらに MKdV 方程式 (21) はブリーザー解，代数的ソリトン解をもつ．

Tea Time

自己集束

自縄自縛という言葉がある．自分でつくった縄で自分自身を縛るということであり，自分でいった言葉，自分たちでつくった規約などに縛られて臨機応変な行動をとれない情況を意味する．悪循環というと，ある情況から抜け出そうとする行為がさらに悪い結果を生む場合で，そこを抜け出せなくなるからやはり自縄自縛であり，悪く作動したフィードバックである．

フィードバックがよく作動すれば望ましい状態が安定に保たれる．これは良い結果を生む自縄自縛といってもよいだろう．

非線形シュレーディンガー方程式（NLS）は波がつくるポテンシャルにその波自身が束縛力を受ける場合を含んでいる．自縄自縛ほど強くはなくても自己をみずから束縛する．NLSは1次元の方程式であるが，強い光がある媒質中を進むときは光のエネルギーが集中したオプティカルソリトンや自己集束という現象が起こることがある．光に対する媒質の屈折率が光の強さによって変わるときはそのために波面が曲げられる．光は波面に垂直に進むからこのような媒質では光の強さが光の進路を変化させて光が集中することが起こりうる．光が集中すれば光はますます強くなるから集中効果はさらに著しくなる．こうして光の自己集束という現象が起こるのである．

第18講

ラックス形式の拡張

—テーマ—

- ◆ KdV ヒエラルキー
- ◆ AKNS 方程式
- ◆ AKNS の逆散乱法
- ◆ Tea Time: 虚数を含む方程式

KdV ヒエラルキー

すでに第8講で述べたように非線形発展方程式を

$$L_t=[B,L]=BL-LB \tag{1}$$

と書いたとき，これをラックス形式（あるいはラックス方程式）といい，演算子（あるいは行列）L と B をラックス対という．線形方程式系

$$\begin{aligned} L\varphi&=\lambda\varphi \\ \lambda_t&=0 \\ \varphi_t&=B\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

から（1）を導くことができる．したがって（1）を解くには方程式系（2）を解けばよい．

このラックス形式はいろいろの拡張が可能である．ここでは高階（高次）の発展方程式系（ヒエラルキー）と AKNS 方程式とについて述べる．

【高階 KdV 方程式】 これから述べる KdV 方程式系では L として

$$L=D^2+\frac{1}{6}u \qquad \left(D=\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3}$$

とする．このとき $\partial(L\varphi)/\partial t=L_t\varphi+L\,\partial\varphi/\partial t$ により

$$\begin{aligned} L_t\varphi&=\frac{\partial}{\partial t}(L\varphi)-L\varphi_t \\ &=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{6}u\varphi\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{6}u\right)\varphi_t \\ &=\frac{1}{6}\,\frac{\partial u}{\partial t}\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

したがって

$$L_t=\frac{1}{6}\,\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5}$$

である（第8講（4）参照）．

いま B として

$$B_0=D=\frac{\partial}{\partial x} \tag{6}$$

をとると

$$\begin{aligned} (B_0L-LB_0)\varphi&=\frac{\partial}{\partial x}(L\varphi)-L\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ &=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{6}u\right)\varphi\right\}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{6}u\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ &=\frac{1}{6}\,\frac{\partial u}{\partial x}\varphi \end{aligned} \tag{7}$$

したがって

$$[B_0, L]=\frac{1}{6}\,\frac{\partial u}{\partial x} \tag{8}$$

となり，（1）は

$$u_t=u_x \tag{9}$$

を与える．これは線形であるが1つの発展方程式である．

次に B として

$$B_1=D^3+\frac{1}{8}(uD+Du) \tag{10}$$

をとれば，すでに第8講（6）と同様にして

$$(B_1L-LB_1)\varphi=\frac{1}{144}(uu_x+u_{xxx})\varphi \tag{11}$$

したがって

$$[B_1, L]=\frac{1}{144}(uu_x+u_{xxx}) \tag{12}$$

であり，(1) は

$$u_t=\frac{1}{24}(uu_x+u_{xxx}) \tag{13}$$

を与える．これは（第8講（3）と係数，すなわち尺度は異なっているが）ふつうの KdV 方程式である．

一般に B として

$$B_q=D^{2q+1}+\sum_{j=1}^{q}(b_jD^{2j-1}+D^{2j-1}b_j) \tag{14}$$

をとり，D の奇数次だけを取るとき，$[B_q, L]$ が u と u の微係数で表されるように，係数 b_j を一義的に決めることができる．このとき（1）は

$$u_t=K_q[u]=K_q(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \cdots) \tag{15}$$

の形の発展方程式を与える．これを q 次の KdV 方程式，$u_t=K_q[u]$ の集まりを KdV ヒエラルキーという．u がこの高次 KdV 方程式に従って変化するとき，シュレーディンガー方程式 $L\varphi=\lambda\varphi$ の固有値 λ は時間によらず一定である（$B=B_0$ に対してもそうである）．

AKNS 方程式

これは多くの発展方程式を含むようにラックス形式を拡張したもので，一般的な逆散乱法を与える．アブロビッツ（M. J. Ablowitz），カウプ（D. J. Kaup），ニューウェル（A. C. Newell），シガー（H. Segur）によって提唱された（1974年）ので，AKNS 方程式という．

線形演算子

$$L=\begin{bmatrix} i\dfrac{\partial}{\partial x} & -iq(x,t) \\ ir(x,t) & -i\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{16}$$

の固有値方程式を

$$L\varphi=\lambda\varphi \tag{17}$$

とし，固有ベクトル

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \tag{18}$$

の時間発展を

$$\begin{aligned} i\varphi_t&=T\varphi\\ T&=\begin{bmatrix}A(x,t;\lambda) & B(x,t;\lambda)\\ C(x,t;\lambda) & -A(x,t;\lambda)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{19}$$

とする．さらに λ が時間によらないように A,B,C を選ぶ．このとき q および r は逆散乱法により

$$\begin{aligned} q(x,t)&=-2K_1(x,x)\\ r(x,t)&=-2K_2(x,x)\end{aligned} \tag{20}$$

と求められる．ここで $K(x,y)$ はゲルファント-レビタンの方程式を拡張した式

$$\begin{aligned} K(x,y)-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}F(x+y)-\int_x^\infty \bar{K}(x,s)\,\bar{F}(s+y)\,ds&=0\\ \bar{K}(x,y)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\bar{F}(x+y)+\int_x^\infty K(x,s)\,F(s+y)\,ds&=0\end{aligned} \tag{21}$$

ただし

$$K(x,y)=\begin{bmatrix}K_1(x,y)\\ K_2(x,y)\end{bmatrix},\qquad \bar{K}(x,y)=\begin{bmatrix}\bar{K}_1(x,y)\\ \bar{K}_2(x,y)\end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} F(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(\xi)}{a(\xi)}e^{i\xi x}\,d\xi-i\sum_k C_k e^{i\lambda_k x}\\ \bar{F}(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{b}(\xi)}{\bar{a}(\xi)}e^{-i\xi x}\,d\xi+i\sum_k \bar{C}_k e^{-i\bar{\lambda}_k x}\end{aligned} \tag{23}$$

で与えられる．また $\bar{K},\bar{F}$ は K,F の複素共役であり，$\lambda_k(\bar{\lambda}_k)$ は複素 ξ 平面の上半面（下半面）にある（17）の固有値である．散乱データを与えたとき，a,b,C_k，$\bar{a},\bar{b},\bar{C}_k$ の時間発展は一義的に与えられる．(23) の右辺第2項 ($C_k,\bar{C}_k$ を含む項) はソリトンを与え，第1項 (a,b などを含む項) はソリトン以外の運動を与える．

ここで

$$A=4\lambda^3+2qr\lambda+irq_x-iqr_x \tag{24}$$

としたとき，$r=1$ とおくと KdV 方程式，$r=q$ とおくと変形された KdV 方程式になる．また

$$A=2\lambda^2+qr, \qquad r=-\frac{Q}{2}q^* \quad (Q\text{は定数}) \tag{25}$$

とおくと非線形シュレーディンガー方程式になり

$$A=-\frac{\cos\phi}{4\lambda}, \qquad r=-q=\frac{1}{2}\phi_x \tag{26}$$

とおくとサイン-ゴルドン方程式になる．

Tea Time

虚数を含む方程式

非線形発展方程式は無数にありうるが，本書では，1) ソリトン解をもつものを中心にし，2) 1本の方程式で書けるものだけに注目し，3) 主に実数の領域の方程式を考え，4) 主に1次元の波動を扱ってきた．

第17講で述べた非線形シュレーディンガー方程式では複素数が入り，ここでは AKNS 法で虚数を導入している．実数の場を扱う場合でも複素数を導入しなければならないこともあるし，複素数の領域へ広げれば内容が非常に広がり，有利なことが多いのは当然である．

多くの物理的な問題において2つ以上の場の相互作用が論じられる．2つあるいは2つ以上の非線形場を扱う連立方程式の研究も盛んになされている．

1つのおもしろい例として非線形発展方程式系

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-v\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}-a(x)\\ \frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned} \tag{1}$$

をあげよう．ここで

$$\varphi=u+iv \tag{2}$$

とおくと（1）は1次元の非線形発展方程式

$$-i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial x}-a(x) \qquad (3)$$

となる．$a(x)=0$ のときこれはバーガーズ方程式 $u_t+uu_x=\nu u_{xx}$ の時間を虚数にしたものなので，コール-ホップ変換で線形化できる．$a(x)\neq 0$ の場合でも

$$\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\log\psi \qquad (4)$$

とおけば（3）は

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\psi}\left\{i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi\right\}=0 \qquad (5)$$

となる．これから

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+a(x)\psi \qquad (6)$$

が導かれるが，これは量子力学におけるシュレーディンガー方程式（ポテンシャル $a(x)$）にほかならない．

第19講

ベックルント変換

—テーマ—

- ◆ サインーゴルドン方程式
- ◆ 戸田方程式
- ◆ Tea Time: カップーメールベッケ系

方程式と解の変換

2階の偏微分方程式である波動方程式

$$u_{tt}=u_{xx} \tag{1}$$

は1階の連立方程式

$$\begin{aligned} u_t&=v_x \\ u_x&=v_t \end{aligned} \tag{2}$$

と同等である．また（2）から v に対しても同じ形の方程式

$$v_{tt}=v_{xx} \tag{3}$$

が導かれる．

いろいろな非線形発展方程式についてこれに似たことがあって，高階の微分や偏微分を含む方程式が低い階数の連立方程式に帰着させられる．これはサインーゴルドン方程式は負の一定曲率の曲面を表すが，この面の間の相互の変換を取り扱ったベックルント（A. V. Bäcklund）の研究に発する（1882年）．

サイン-ゴルドン方程式

aを任意定数とするとき，方程式系

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_\tau-\phi_\tau'&=2a\sin\frac{\phi+\phi'}{2}\\ \phi_s+\phi_s'&=\frac{2}{a}\sin\frac{\phi-\phi'}{2}\end{aligned}}\qquad(4)$$

が成り立つとすれば，ϕ,ϕ'はサイン-ゴルドン方程式を満たす．すなわち（4）から

$$\begin{aligned}\phi_{s\tau}&=\sin\phi\\ \phi_{s\tau}'&=\sin\phi'\end{aligned}\qquad(5)$$

が導かれる．

【証明】（4）の第1式をsで微分すれば第2式により

$$\begin{aligned}\phi_{\tau s}-\phi_{\tau s}'&=(\phi_s+\phi_s')\,a\cos\frac{\phi+\phi'}{2}\\ &=2\sin\frac{\phi-\phi'}{2}\cos\frac{\phi+\phi'}{2}\\ &=\sin\phi-\sin\phi'\end{aligned}\qquad(6)$$

同様に（4）の第2式をτで微分すれば第1式から

$$\begin{aligned}\phi_{s\tau}+\phi_{s\tau}'&=(\phi_\tau-\phi_\tau')\frac{1}{a}\cos\frac{\phi-\phi'}{2}\\ &=2\sin\frac{\phi+\phi'}{2}\cos\frac{\phi-\phi'}{2}\\ &=\sin\phi+\sin\phi'\end{aligned}\qquad(6')$$

よって（6）と（6′）の和および差から（5）を得る． ∎

【ベックルント変換】 サイン-ゴルドン方程式の1つの解ϕを（4）に代入してϕ'について1階の方程式（4）を解けば別の解ϕ'を得ることができる．このときパラメタaは新しい解の性質を与える．

【例】 $\phi=0$は明らかにSG方程式の解である．これに対し（4）は

$$-\phi_\tau'=2a\sin\frac{\phi'}{2},\qquad \phi_s'=-\frac{2}{a}\sin\frac{\phi'}{2}\qquad(7)$$

これを解けば新しい解 ϕ' として

$$\phi'=4\tan^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{s+a^2\tau}{a}\right)\right\} \tag{8}$$

を得る．これは第17講のキンク解か反キンク解である．$s=(x+t)/2$，$\tau=(x-t)/2$ を用いて書き直すと

$$-\frac{s+a^2\tau}{a}=-\frac{1+a^2}{2a}x-\frac{1-a^2}{2a}t$$

$$=\mp\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (a\gtrless 0) \tag{9}$$

と書き直せる．したがって（8）は第17講（10）と同じで $a<0$ ならばキンク，$a>0$ ならば反キンク解である．

戸田格子

A,α を任意定数とするとき，方程式系

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{Q}_n&=Ae^{-(Q_n'-Q_n)}+\frac{1}{A}e^{-(Q_n-Q_{n-1}')}-\alpha\\ \dot{Q}_n'&=Ae^{-(Q_n'-Q_n)}+\frac{1}{A}e^{-(Q_{n+1}-Q_n')}-\alpha\end{aligned}} \tag{10}$$

が成り立つとすれば，Q_n と Q_n' は戸田格子の方程式

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_n&=e^{-(Q_n-Q_{n-1})}-e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}\\ \ddot{Q}_n'&=e^{-(Q_n'-Q_{n-1}')}-e^{-(Q_{n+1}'-Q_n')}\end{aligned} \tag{11}$$

を満たす．

【証明】（10）の第1式を t で微分して書き直せば

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_n&=-(\dot{Q}_n'-\dot{Q}_n)Ae^{-(Q_n'-Q_n)}-(\dot{Q}_n-\dot{Q}_{n-1}')\frac{1}{A}e^{-(Q_n-Q_{n-1}')}\\ &=-\{e^{-(Q_{n+1}-Q_n')}-e^{-(Q_n-Q_{n-1}')}\}e^{-(Q_n'-Q_n)}\\ &\quad-\{e^{-(Q_n'-Q_n)}-e^{-(Q_{n-1}'-Q_{n-1})}\}e^{-(Q_n-Q_{n-1}')}\\ &=e^{-(Q_n-Q_{n-1})}-e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}\end{aligned} \tag{12}$$

となり（11）の第1式を得る．第2式についても同様である．∎

【ベックルント変換の例】 $Q_n=\dot{Q}_n=0$ は（11）の第1式の解の1つである．こ

れを (10) に代入すれば

$$0=Ae^{-Q_n'}+\frac{1}{A}e^{Q_{n-1}'}-\alpha$$
$$\dot{Q}_n'=Ae^{-Q_n'}+\frac{1}{A}e^{Q_n'}-\alpha \tag{13}$$

を得る．(13) を解くため

$$e^{Q_n'-Q_{-\infty}'}=z\frac{\psi(n)}{\psi(n+1)},\qquad z=Ae^{-Q_{-\infty}} \tag{14}$$

$$\alpha=Ae^{-Q_{-\infty}'}+\frac{1}{A}e^{Q_{-\infty}}=z+\frac{1}{z} \tag{15}$$

とおくと (13) の第1式は

$$\psi(n-1)+\psi(n+1)=(z^{-1}+z)\psi(n) \tag{16}$$

を与え，第2式は

$$\frac{\dot{\psi}(n)}{\psi(n)}+\frac{\psi(n-1)}{\psi(n)}=\frac{\dot{\psi}(n-1)}{\psi(n-1)}+\frac{\psi(n-2)}{\psi(n-1)}=\cdots \tag{17}$$

を与える ($\dot{\psi}=d\psi/dt$)．他方で $n\to-\infty$ とすると (14) は $z\psi(n)=\psi(n+1)$，あるいは

$$\psi(n)\to z^nB(t)\qquad(n\to-\infty)$$

を与える．ここで $B(t)$ は n によらない t の関数であり，(17) は

$$\frac{\dot{\psi}(n)}{\psi(n)}+\frac{\psi(n-1)}{\psi(n)}=\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}+\frac{1}{z} \tag{18}$$

を与える．(18) の右辺も n によらない t の関数である．

(16) と (18) は

$$\psi(n,t)=B(0)\,e^{-kn-\beta t}+C(0)\,e^{kn+\beta t} \tag{19}$$

によって満たされる．ただし

$$\beta=\frac{1}{2}(z^{-1}-z)=\sinh k \tag{20}$$

なお，このとき $B(t)=B(0)e^{-\beta t}$ となる．

$B(0)C(0)>0$ とすると (19) は

$$\psi(n,t)=2D\cosh\{k(n-1)+\beta t+\delta\} \tag{21}$$

と書け，したがって (14) は

$$e^{Q_n'-Q_{-\infty}'}=z\frac{\cosh\,(kn-k+\beta t+\delta)}{\cosh\,(kn+\beta t+\delta)} \tag{22}$$

となる．これは第11講 (21) と同じ式であり，ソリトン解

$$e^{-(Q_{n+1}'-Q_n')}-1=\beta^2\,\mathrm{sech}^2\,(kn+\beta t+\delta) \tag{23}$$

を与える．

$B(0)C(0)<0$ とすると同様の計算により

$$\begin{aligned}\psi(n,t)&=2D\sinh\,\{k(n-1)+\beta t+\delta\}\\ e^{-(Q_{n+1}'-Q_n')}-1&=-\beta^2\,\mathrm{cosech}^2\,(kn+\beta t+\delta)\end{aligned} \tag{24}$$

となる．これは発散する解であるが，部分的には実現可能な運動で，反ソリトンと呼ばれる．

【逆散乱法との関係】 上述の方法は逆散乱法との関係を示唆している．(13), (14) において Q_n はソリトンのない状態，すなわち0ソリトン解であり，Q_n' は1ソリトン解であり，(14) はこれらを結び付ける式である．これを拡張して，Q_n を既知の N ソリトン解，Q_n' を求めようとする $N+1$ ソリトン解として，(14) を拡張した式

$$e^{Q_{n-1}'}=e^{(Q_n+Q_{n-1})/2}\frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n)} \tag{25}$$

を考える．これを (10) の第1式に代入して $A=-1$, $\alpha=-(z^{-1}+z)$ とおくと

$$a_{n-1}\varphi(n-1)+b_n\varphi(n)+a_n\varphi(n+1)=\frac{z^{-1}+z}{2}\varphi(n) \tag{26}$$

を得る．ただし a_n, b_n は N ソリトン解で与えられる

$$a_n=\frac{1}{2}e^{-(Q_{n+1}-Q_n)/2},\qquad b_n=\frac{1}{2}\dot{Q}_n \tag{27}$$

である（したがって $\varphi(n)$ は逆散乱法 $L\varphi=\lambda\varphi$ の式を満足する）．$\varphi(n)$ の時間変化については (10) から得られる式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Q_n+Q_{n-1}-2Q_{n-1}')&=A\{e^{-(Q_n'-Q_n)}-e^{-(Q_{n-1}'-Q_{n-1})}\}\\&\quad-\frac{1}{A}\{e^{-(Q_n-Q_{n-1}')}-e^{-(Q_n-Q_{n-2}')}\}\end{aligned} \tag{28}$$

に (25) を代入し ($A=-1$)

$$\frac{\dot{\varphi}(n)}{\varphi(n)}+a_n\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}-a_{n-1}\frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n)}$$

$$=\frac{\dot{\varphi}(n-1)}{\varphi(n-1)}+a_{n-1}\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)}-a_{n-2}\frac{\varphi(n-2)}{\varphi(n-1)}$$

$$=\cdots \tag{29}$$

を得る．したがって

$$\dot{\varphi}(n)=a_{n-1}\varphi(n-1)-a_n\varphi(n+1)+F(t)\varphi(n) \tag{30}$$

となる．ここで$F(t)$はnによらない関数であるが，$\varphi(n)\exp\left\{\int F(t)\,dt\right\}$を改めて$\varphi(n)$とおけば$F(t)$は消去でき，(25)で$Q_n'$を求めるとき因子$\exp\left\{\int F(t)\,dt\right\}$は何の寄与も与えない．したがって$F(t)=0$とおいてもよい．

そこでNソリトン解Q_nからa_n, b_nをつくり，逆散乱の式(26)と(30)を解いて$\varphi(n)$を求めれば，(25)によって新しく$N+1$ソリトン解Q_n'を構成することができる．このとき(26)のパラメタzは新しく加わった$N+1$番目のソリトンを特徴づける．

KdV 方程式

KdV 方程式

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{31}$$

のベックルント変換は

$$u(x,t)=w_x(x,t) \tag{32}$$

とおいたとき，ηを定数として

$$\boxed{\begin{aligned} w_x+w_x'&=-2\eta^2+\frac{1}{2}(w-w')^2 \\ w_t+w_t'&=2(w_x^2+w_xw_x'+w_x'^2)-(w-w')(w_{xx}-w_{xx}') \end{aligned}} \tag{33}$$

で与えられる．

変換のダイヤグラム

ベックルント変換によって1つの解からソリトンの1つ増加した新しい解を得ることは実際には簡単ではない．しかし積分しないでつぎつぎと解を構成するた

くみな方法がある．

初めの解を ϕ_0 とし，これからベックルント変換により導かれた2つの解を ϕ_1, ϕ_2 とする．そして ϕ_1 と ϕ_2 からさらに新しい解 ϕ_{12} をつくることを考える（図44）．具体的にSG方程式を考えよう．

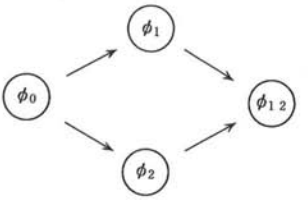


図44

【SGの場合】　この場合のベックルント変換は（4）から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{2}(\phi_0+\phi_1)&=\frac{1}{a_1}\sin\frac{\phi_0-\phi_1}{2}\\
\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{2}(\phi_0+\phi_2)&=\frac{1}{a_2}\sin\frac{\phi_0-\phi_2}{2}\\
\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{2}(\phi_1+\phi_{12})&=\frac{1}{a_2}\sin\frac{\phi_1-\phi_{12}}{2}\\
\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{2}(\phi_2+\phi_{12})&=\frac{1}{a_1}\sin\frac{\phi_2-\phi_{12}}{2}
\end{aligned}\tag{34}$$

これらの式から x に関する微分を消去すれば

$$\phi_{12}=\phi_0+4\tan^{-1}\left(\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\tan\frac{\phi_1-\phi_2}{4}\right)\tag{35}$$

が得られる．これは代数的な関係式であるから ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 を与えれば積分をしなくても新しい解 ϕ_{12} が計算できる．こうしてキンク，反キンク，ブリーザー解が導かれる．

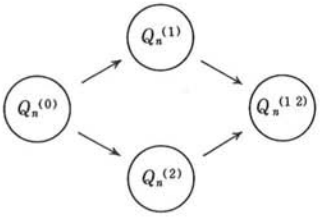


図45

【戸田格子の場合】　ソリトン解 $Q_n^{(0)}, Q_n^{(1)}, Q_n^{(2)}$ が与えられればSGの場合と同様に代数的計算で新しい解 $Q_n^{(12)}$ が構成できる．この場合

$$\begin{aligned}
Q_{-\infty}^{(0)}&=\gamma^{(0)}, \qquad Q_{-\infty}^{(1)}=\gamma^{(1)},\\
Q_{-\infty}^{(2)}&=\gamma^{(2)}, \qquad Q_{-\infty}^{(12)}=\gamma^{(12)}
\end{aligned}\tag{36}$$

とする．変換式のダイヤグラム（図45）に従い

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(Q_n^{(0)}-Q_{n-1}^{(1)})&=z_1\{e^{-(Q_n^{(1)}-\gamma^{(1)}-Q_n^{(0)}+\gamma^{(0)})}-e^{-(Q_{n-1}^{(1)}-\gamma^{(1)}-Q_{n-1}^{(0)}+\gamma^{(0)})}\}\\
\frac{d}{dt}(Q_n^{(0)}-Q_{n-1}^{(2)})&=z_2\{e^{-(Q_n^{(2)}-\gamma^{(2)}-Q_n^{(0)}+\gamma^{(0)})}-e^{-(Q_{n-1}^{(2)}-\gamma^{(2)}-Q_{n-1}^{(0)}+\gamma^{(0)})}\}
\end{aligned}\tag{37}$$

$$\frac{d}{dt}(Q_n^{(1)}-Q_{n-1}^{(12)})=z_2\{e^{-(Q_n^{(12)}-\gamma^{(12)}-Q_n^{(1)}+\gamma^{(1)})}-e^{-(Q_{n-1}^{(12)}-\gamma^{(12)}-Q_{n-1}^{(1)}+\gamma^{(1)})}\}$$

$$\frac{d}{dt}(Q_n^{(2)}-Q_{n-1}^{(12)})=z_1\{e^{-(Q_n^{(12)}-\gamma^{(12)}-Q_n^{(2)}+\gamma^{(2)})}-e^{-(Q_{n-1}^{(12)}-\gamma^{(12)}-Q_{n-1}^{(2)}+\gamma^{(2)})}\}$$

ここで交換法則

$$\begin{aligned}\gamma^{(0)}+\gamma^{(12)}&=\gamma^{(1)}+\gamma^{(2)}\\ z_1=A_1e^{\gamma^{(0)}-\gamma^{(1)}}&=A_1e^{\gamma^{(2)}-\gamma^{(12)}}\\ z_2=A_2e^{\gamma^{(0)}-\gamma^{(2)}}&=A_2e^{\gamma^{(1)}-\gamma^{(12)}}\end{aligned}\tag{38}$$

が成り立つとした．上式から時間に関する微分を消去すれば新しい解 $Q_n^{(12)}$ を構成する式として

$$e^{Q_n^{(12)}-\gamma^{(12)}+Q_{n+1}^{(0)}-\gamma^{(0)}}=\frac{z_1e^{Q_n^{(2)}-\gamma^{(2)}}-z_2e^{Q_n^{(1)}-\gamma^{(1)}}}{z_1e^{-(Q_{n+1}^{(1)}-\gamma^{(1)})}-z_2e^{-(Q_{n+1}^{(2)}-\gamma^{(2)})}}\tag{39}$$

が得られる．

たとえば $Q_n^{(0)}=\gamma^{(0)}=$一定とするとき，$Q_n^{(12)}$ として2ソリトン解を得るためには $Q_n^{(1)}$ と $Q_n^{(2)}$ のどちらかがソリトンで他方が反ソリトンであることが必要である．KdV 方程式についても同様なベックルント変換のダイヤグラムを構成することができる．しかしいずれにしても多ソリトン解をこの方法で構成するのは容易ではない．

Tea Time

カッツ-メールベッケ系

質問　戸田格子と関係があるというカッツ-メールベッケ（M. Kac と P. van Moerbeke）系について説明してください．

答　カッツは確率過程の研究で有名ですが，ツーソン（アリゾナ）の会議で会ったとき，指数関数に関係のあるものなら何でも興味があるといっていました．カッツは不連続確率過程を表す行列（k，l=整数，t=連続）

$$Q_{kl}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\{q(k,t)+q(l,t)\}/2}, & l=k\pm1\\ 0, & (\text{その他の要素})\end{cases}$$

を考え，$Q_{k\,t}$の固有値がtによらない条件として

$$\frac{d}{dt}q(k,t)=e^{-\{q(k,t)+q(k-1,t)\}}-e^{\{q(k+1,t)+q(k,t)\}}$$

を得た．ここで

$$R_k=q(k,t)+q(k+1,t)$$

とおくと上式は

$$\frac{d}{dt}R_k=e^{-R_{k-1}}-e^{-R_{k+1}} \qquad (*)$$

となる．これをカッツ-メールベッケ系と呼ぼう．さらに

$$w_k=R_k+R_{k+1}$$

とおくと

$$\frac{d^2w_k}{dt^2}=2e^{-w_k}-e^{-w_{k-2}}-e^{-w_{k+2}}$$

を得る．したがってw_kを1つおきにとって

$$r_k=w_{2k}, \qquad r_k'=w_{2k+1}$$

とおけば，r_kとr_k'は戸田格子の方程式

$$\frac{d^2r_k}{dt^2}=2e^{-r_k}-e^{-r_{k-1}}-e^{-r_{k+1}}$$

$$\frac{d^2r_k'}{dt^2}=2e^{-r_k'}-e^{-r_{k-1}'}-e^{-r_{k+1}'}$$

を満足することになります．

さらに

$$R_{2k}=Q_k'-Q_k, \qquad R_{2k+1}=Q_{k+1}-Q_k'$$

とおくと

$$r_k=Q_{k+1}-Q_k, \qquad r_k'=Q_{k+1}'-Q_k'$$

(*) は

$$\dot{Q}_k'-\dot{Q}_k=e^{-R_{2k-1}}-e^{-R_{2k+1}}$$

$$\dot{Q}_{k+1}-Q_k'=e^{-R_{2k}}-e^{-R_{2k+2}}$$

となる．したがって

$$\dot{Q}_{k+1}+e^{-R_{2k+1}}+e^{-R_{2k+2}}=\dot{Q}_k+e^{-R_{2k-1}}+e^{-R_{2k}}$$
$$=\cdots=\alpha$$

を得る．Q_k'についても同様であり，これは戸田格子のベックルント変換（本文(10)）と同じです．

第20講

広田の直接法

—テーマ—

- ◆ 広田の演算子
- ◆ 戸田格子の場合，KdV 方程式の場合
- ◆ Tea Time: 和算

広田の演算子

非線形発展方程式を解くたいへん強力な方法が 1971 年に広田良吾によって発見され，Hirota の方法として知られるようになった．これはソリトン解の計算を自分で納得しようとして独自に開発したもので，そういう意味でたいへん教育的でもある．解法だけでなく，多くの非線形方程式の間の関係を明らかにするうえでも大きな役割を果たしているし，数学にもインパクトを与えた．

広田の方法では任意の関数 $a(x)$，$b(x)$ の双線形形式 (bilinear form) $a(x)\cdot b(x)$ にはたらく演算子 D_x を

$$D_x a(x)\cdot b(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)a(x)b(x')\Big|_{x=x'} \qquad (1)$$

で定義する．格子の問題では $x=t$，あるいは $x=n$ である．何回も演算するときは

$$D_x^l a(x)\cdot b(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^l a(x)b(x')\Big|_{x=x'} \qquad (2)$$

である．これによってD_nの多項式や無限級数

$$\sinh(D_n/2)=\frac{D_n}{2}+\frac{1}{3!}\left(\frac{D_n}{2}\right)^3+\cdots \tag{3}$$

が定義される．すぐわかるように

$$\begin{gathered}D_x{}^l a\cdot 1=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^l a\\ D_x{}^l a\cdot b=(-1)^l D_x{}^l b\cdot a\\ D_x{}^{2l+1}a\cdot a=0\qquad (l=0,1,2,\cdots)\end{gathered} \tag{4}$$

また

$$\begin{gathered}\text{もしも } D_x a\cdot b=0 \text{ ならば，} a \text{ は } b \text{ の定数倍}\\ \sinh(\varepsilon D_x)a\cdot b=0 \text{ のときも，} a \text{ は } b \text{ の定数倍}\end{gathered} \tag{5}$$

である．さらに$\alpha,\beta,\varepsilon,\delta$を定数として

$$\begin{gathered}D_x{}^l e^{\alpha x}\cdot e^{\beta x}=(\alpha-\beta)^l e^{(\alpha+\beta)x}\\ e^{\varepsilon D_x}a\cdot b=a(x+\varepsilon)b(x-\varepsilon)\\ D^{\varepsilon D_t+\delta D_n}a(t,n)\cdot b(t,n)=a(t+\varepsilon,n+\delta)b(t-\varepsilon,n-\delta)\\ (l=0,1,2,\cdots)\end{gathered} \tag{6}$$

が成り立つ．また一般に$F(D_t,D_n)$をD_tとD_nの多項式とするとき

$$\begin{aligned}&F(D_t,D_n)\,e^{\Omega_1 t+p_1 n}\cdot e^{\Omega_2 t+p_2 n}\\ &=F(\Omega_1-\Omega_2,p_1-p_2)\,e^{(\Omega_1+\Omega_2)t+(p_1+p_2)n}\\ &=\frac{F(\Omega_1-\Omega_2,p_1-p_2)}{F(\Omega_1+\Omega_2,p_1+p_2)}F\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{(\Omega_1+\Omega_2)t+(p_1+p_2)n}\end{aligned} \tag{7}$$

が成り立つ．これは重要な式である．

戸田格子

格子の運動方程式

$$\frac{d^2r_n}{dt^2}=2e^{-r_n}-e^{-r_{n-1}}-e^{-r_{n+1}}\qquad(-\infty<n<\infty) \tag{8}$$

から出発しよう．

$$V_n(t)=e^{-r_n}-1 \tag{9}$$

とおくと（8）は

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\log(1+V_n)=V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n} \tag{10}$$

となる．ここで

$$\boxed{V_n(t)=\frac{d^2}{dt^2}\log f_n(t)} \tag{11}$$

とおくと (10) は

$$\ddot{f}_n f_n-\dot{f}_n{}^2=f_{n-1}f_{n+1}-f_n{}^2 \tag{12}$$

となる．

さて

$$\begin{aligned}D_t{}^2 f_n(t)\cdot f_n(t)&=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 f_n(t)f_n(t')\Big|_{t=t'}\\&=2(\ddot{f}_n f_n-\dot{f}_n{}^2)\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\sinh^2\left(\frac{D_n}{2}\right)f_n(t)\cdot f_n(t)&=(e^{D_n}+e^{-D_n}-2)f_n(t)\cdot f_n(t)\\&=2(f_{n-1}f_{n+1}-f_n{}^2)\end{aligned} \tag{14}$$

であるから，格子の運動方程式 (12) は

$$\boxed{\left\{D_t{}^2-4\sinh^2\left(\frac{D_n}{2}\right)\right\}f_n(t)\cdot f_n(t)=0} \tag{15}$$

と書ける．

(15) のソリトン解を求めよう．そのため形式的に展開

$$f_n(t)=1+\varepsilon f_n{}^{(1)}(t)+\varepsilon^2 f_n{}^{(2)}(t)+\cdots \tag{16}$$

を仮定する．ε は別に小さいわけでなく，ただ性質の違う項を分けるためのパラメタである．

(16) を (15) に代入して ε^1 の係数を取ると（4）により

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left\{2\sinh\left(\frac{\partial}{2\partial n}\right)\right\}^2\right]f_n{}^{(1)}=0 \tag{17}$$

を得，ε^2 の係数から方程式

$$2\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left\{2\sinh\left(\frac{\partial}{2\partial n}\right)\right\}^2\right]f_n{}^{(2)}(t)$$

$$=-\left[D_t^2-\left\{2\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)\right\}^2\right]f_n^{(1)}(t)\cdot f_n^{(1)}(t) \tag{18}$$

を得る．さらに高次の項も導かれる．

(17) は線形の式で $f_n^{(1)}$ としてソリトンを与える形 $e^{\Omega t-pn}$ でも，線形波 $e^{i\Omega t-ipn}$ でも満たされる．非線形なのは (18) とさらに高次の方程式であり，ソリトン解はこれらの方程式をすべて満たすものとして得られるわけである．

【1ソリトン解】　ソリトン解を求めるため

$$f_n^{(1)}(t)=e^{2\eta},\qquad \eta=\Omega t-pn-\eta_0 \tag{19}$$

とおくと (17) は

$$\Omega=\sinh p \tag{19'}$$

とすることによって満足され，(18) の右辺は (7) により

$$\left[D_t^2-\left\{2\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)\right\}^2\right]e^{\Omega t-pn-\eta_0}\cdot e^{\Omega t-pn-\eta_0}=0 \tag{20}$$

となるので

$$f_n^{(2)}=0 \tag{21}$$

とおくことによって (18) は満足される．そしてさらに

$$f_n^{(3)}=f_n^{(4)}=\cdots=0 \tag{21'}$$

とすればすべての方程式が満足される．したがって (19)，(21)，(21′) は特解 (1ソリトン解) を与える．すなわち

$$f_n=1+\varepsilon e^{2(\Omega t-pn-\eta_0)},\qquad \Omega=\sinh p \tag{22}$$

は1ソリトン解 ((11) 参照)

$$V_n(t)=\Omega^2\operatorname{sech}^2(\Omega t-pn-\eta_0) \tag{23}$$

を与える．

【2ソリトン解】　2ソリトン解を求めるため

$$\begin{aligned} f_n^{(1)}&=e^{2\eta_1}+e^{2\eta_2}\\ \eta_i&=\Omega_i t-p_i n-\eta_i^0\\ \Omega_i&=(\pm)_i\sinh p_i\qquad (i=1,2)\end{aligned} \tag{24}$$

とおく．このとき (18) の右辺で，(7) を用いれば

$$\left[D_t^2-\left\{2\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)\right\}^2\right]f_n^{(1)}\cdot f_n^{(1)}$$

$$=\left[D_t^2-\left\{2\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)\right\}^2\right](e^{2\eta_1}\cdot e^{2\eta_2}+e^{2\eta_2}\cdot e^{2\eta_1})$$

$$=2\left[\{2(\Omega_1-\Omega_2)\}^2-\{2\sinh(p_1-p_2)\}^2\right]e^{2(\eta_1+\eta_2)}$$

$$=2\frac{\{2(\Omega_1-\Omega_2)\}^2-\{2\sinh(p_1-p_2)\}^2}{\{2(\Omega_1+\Omega_2)\}^2-\{2\sinh(p_1+p_2)\}^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left\{2\sinh\left(\frac{\partial}{2\partial n}\right)\right\}^2\right]e^{2(\eta_1+\eta_2)} \tag{25}$$

これが (18) の左辺に等しくなければならないから

$$f_n^{(2)}(t)=Be^{2(\eta_1+\eta_2)}$$

$$B=\frac{\{2(\Omega_1-\Omega_2)\}^2-\{2\sinh(p_1-p_2)\}^2}{-\{2(\Omega_1+\Omega_2)\}^2+\{2\sinh(p_1+p_2)\}^2} \tag{26}$$

とすればよい ($B>0$ であることが示される). (18) よりも高次の方程式は

$$f_n^{(3)}(t)=f_n^{(4)}(t)=\cdots=0 \tag{27}$$

とすることによって満足される. ε は任意だから $\varepsilon=1$ として, 2 ソリトン解

$$f_n(t)=1+e^{2\eta_1}+e^{2\eta_2}+Be^{2(\eta_1+\eta_2)} \tag{28}$$

を得る. これはすでに知っている 2 ソリトン解である.

KdV 方程式

KdV 方程式を

$$\boxed{u_t+6uu_x+u_{xxx}=0} \tag{29}$$

とする. ここで

$$\boxed{u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log f} \tag{30}$$

とおくと KdV 方程式 (29) は

$$\boxed{D_x(D_t+D_x^3)f\cdot f=0} \tag{31}$$

となる.

【証明】

$$D_xD_tf\cdot f=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)f(x,t)\,f(x',t')\Big|_{\substack{x=x'\\t=t'}}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}f(x',t)-f(x,t)\frac{\partial f(x',t)}{\partial t}\right\}\Big|_{x=x'}$$

$$=2(f_{xt}f-f_tf_x) \tag{32}$$

$$D_x^4 f\cdot f=D_x^3(f_x\cdot f-f\cdot f_x)$$

$$=2D_x^3 f_x\cdot f \tag{33}$$

ここで

$$v=\frac{\partial}{\partial x}\log f=\frac{f_x}{f} \tag{34}$$

とおけば

$$D_xD_tf\cdot f=2(f_{xt}f-f_tf_x)=2f^2v_t \tag{35}$$

また，任意の a,b について成り立つ式

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{a}{b}=\frac{D_x^3a\cdot b}{b^2}-3\left(\frac{D_xa\cdot b}{b^2}\right)\frac{D_x^2b\cdot b}{b^2} \tag{36}$$

において，$a=f_x$，$b=f$ とし

$$\begin{aligned}D_xf_x\cdot f&=f_{xx}f-f_x^2=f^2v_x\\ D_x^2f\cdot f&=2(f_{xx}f-f_x^2)=2f^2v_x\end{aligned} \tag{37}$$

に注意すれば

$$\frac{D_x^3f_x\cdot f}{f^2}=v_{xxx}+6v_x^3 \tag{38}$$

を得る．したがって

$$\frac{1}{f^2}D_x(D_t+D_x^3)f\cdot f=2(v_t+6v_x^2+v_{xxx}) \tag{39}$$

となる．さらに

$$u=2v_x \tag{40}$$

とおけば (31) と (39) は KdV 方程式 (29) を与える．

【ソリトン解】 (31) を解くため

$$f(t,x)=1+\varepsilon f^{(1)}(t,x)+\varepsilon^2f^{(2)}(t,x)+\cdots \tag{41}$$

とおく．戸田格子の場合と同様にして

$$\begin{aligned}&f^{(1)}=e^{2\eta}\\ &\eta=\beta t-\kappa x-\eta_0,\qquad \beta=4\kappa^3\\ &f^{(2)}=f^{(3)}=\cdots=0\end{aligned} \tag{42}$$

が1ソリトン解

$$u=2\beta^2\,\mathrm{sech}^2(\kappa x-\beta t+\eta_0) \tag{43}$$

を与える.

2ソリトン解は

$$\begin{gathered}f=1+f^{(1)}+f^{(2)}=1+e^{2\eta_1}+e^{2\eta_2}+Be^{2(\eta_1+\eta_2)}\\ f^{(1)}=e^{2\eta_1}+e^{2\eta_2}\\ \eta_i=\beta_i t-\kappa_i x-\eta_i{}^0\\ \beta_i=4\kappa_i{}^3\qquad(i=1,2)\\ f^{(2)}=Be^{2(\eta_1+\eta_2)}\\ B=-\frac{(\kappa_1-\kappa_2)[2(\beta_1-\beta_2)-\{2(\kappa_1-\kappa_2)\}^3]}{(\kappa_1+\kappa_2)[2(\beta_1+\beta_2)-\{2(\kappa_1+\kappa_2)\}^3]}\\ =\left(\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\right)^2\end{gathered} \tag{44}$$

で与えられることがわかる.

Tea Time

和算

広田の方法には和算を思わせるものがある.

和算は日本で独自に発達した数学である. 日本の数学は奈良時代に中国の数学を手本としていたが, それ以後は江戸時代まで断片的な記録しか存在しない. 江戸時代の数学は『塵却記』(寛永4(1627)年)と『竪亥録』(寛永16年)から始まったといわれている.『塵却記』の巻末には世間の数学者に問う問題が載せられており, この問題に答えた人々がまた新たに問題を提出し, つぎつぎと解答, 出題がされるようになった. このころから神社仏閣に数学の問題をえがいた絵馬(算額)が流行し始めた. 関孝和(? -1708)はこのような和算の興隆期に育ちこれを発展させた.

関孝和は甲府宰相に仕えて勘定吟味役となり, 徳川綱豊が綱吉の養子となって家宣と改名し江戸城に入ったので関も江戸城の御納戸役を勤めるようになった.

中国から伝わった数学には問題を方程式にしてこれを解く方法があったが，そのために算木を用いていた．関は新しい演算記号を導入して中国伝来の数学では解くことのできない問題も解く方法を樹立した．彼は行列式，級数などの研究により，ベルヌーイなどの仕事に先んじていた．無限小の概念ももっていたが，微積分に発達させることができなかった．それは日本にはニュートン（1642-1727）を駆り立てたような物理的な背景がなかったためであるといえるかもしれない．

筆者は福島県の三春を訪れたときに神社に掲げられた算額をみて江戸時代の地方文化の高さに大きな感銘を受けたことがある．

第 21 講

2 次元 KdV 方程式 (KP方程式)

—テーマ—

- ◆ KP 方程式
- ◆ ソリトン解のロンスキアン表現
- ◆ Tea Time: 2 次元 KdV 方程式

KP 方程式

ここでは KdV 方程式を

$$-4u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1}$$

と書こう．t を $-t/4$ に変えたのでソリトン解は p と ε を任意定数として

$$u=2p^2\,\mathrm{sech}^2(px+p^3t+\varepsilon) \tag{2}$$

となる．

(1) に対し

$$\boxed{(-4u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+3u_{yy}=0} \tag{3}$$

を 2 次元 KdV 方程式，あるいはカドムチェフ-ペトビアシュビリ (Kadomtsev-Petviashvili) 方程式，略して KP 方程式という．u に y 依存性がなければ KdV 方程式になる．

KP 方程式 (3) の解を (第 7 講 (8), (19) 参照)

$$\boxed{u=2\{\log\tau(x,y,t)\}_{xx}} \tag{4}$$

とおくと，まず（3）の左辺の第1項から

$$(u_t)_x=2\frac{\partial}{\partial x}(\log u)_{xxt}=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log\tau)_{tx}$$
$$=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\tau_{xt}\tau-\tau_t\tau_x}{\tau^2}\right) \tag{4'}$$

を得る．同様に

$$(6uu_x+u_{xxx})_x=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\tau_{xxxx}\tau-4\tau_{xxx}\tau_x+3\tau_{xx}{}^2}{\tau^2}\right)$$
$$u_{yy}=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\tau_{yy}\tau-\tau_y{}^2}{\tau^2}\right) \tag{4''}$$

を得る．これらを（1）に代入して $2\partial^2/\partial x^2$ を省き，τ^2 をかけると（1）は

$$\boxed{(\tau_{xxxx}-4\tau_{xt}+3\tau_{yy})\tau-4(\tau_{xxx}-\tau_t)\tau_x+3(\tau_{xx}-\tau_y)(\tau_{xx}+\tau_y)=0} \tag{5}$$

となる（τ_{xxxx} を4次，τ_{xt} を1+3次，τ_{yy} を2+2次というふうに考えれば，この左辺はすべて4次の式であることに注意）．これが τ の満たすべき方程式である．

ソリトン解

（4）の τ として

$$\tau=1+e^{Px+Qy+\Omega t} \tag{6}$$

とおけば1個のソリトンをもつ解を得る．（6）を（5）に代入すれば Ω と P,Q の間の関係（分散関係に相当する）が得られ，（4）からソリトン解が求められる．

1ソリトン解は

$$\tau=e^{\xi}+e^{\eta}$$
$$\xi=px+p^2y+p^3t+\varepsilon \tag{7}$$
$$\eta=qx+q^2y+q^3t+\varepsilon'$$

とおいても得られる．（7）は（5）を自動的に満たすことが容易に示される．ソリトン解は

$$u=\frac{(p-q)^2}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{p-q}{2}x+\frac{p^2-q^2}{2}y+\frac{p^3-q^3}{2}t+\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\right) \qquad (8)$$

となる.

(6) を用いても同様の解を得る. (7) は

$$\tau=e^{\eta}\{1+e^{(p-q)x+(p^2-q^2)y+(p^3-q^3)t+\varepsilon-\varepsilon'}\} \qquad (8')$$

と書け, 右辺の e^{η} は (4) に寄与しないから, (6) と (7) の関係は

$$P=p-q, \qquad Q=p^2-q^2, \qquad \Omega=p^3-q^3, \qquad \delta=\varepsilon-\varepsilon' \qquad (9)$$

で与えられる.

【注意】 とくに (8) において $q=-p$, $\varepsilon'=-\varepsilon$ とおけば (8) は y 依存性のないソリトン解 (2) に帰着する.

また $q=0$, $\varepsilon'=0$ とおけば (7) は特解

$$u=\frac{p^2}{2}\operatorname{sech}^2\{(px+p^2y+p^3t+\varepsilon)/2\} \qquad (10)$$

となる.

2ソリトン解

KdV 方程式の場合と同様に

$$\tau=1+e^{P_1x+Q_1y+\Omega_1t+\delta_1}+e^{P_2x+Q_2y+\Omega_2t+\delta_2}+ae^{(P_1+P_2)+(Q_1+Q_2)y+(\Omega_1+\Omega_2)t+\delta_1+\delta_2} \qquad (11)$$

とおいて (5) に代入すれば長い計算の後に

$$a=-\frac{(P_1-P_2)^4-4(P_1-P_2)(\Omega_1-\Omega_2)+3(Q_1-Q_2)^2}{(P_1+P_2)^4-4(P_1+P_2)(\Omega_1+\Omega_2)+3(Q_1+Q_2)^2} \qquad (12)$$

であることがわかる. ここで

$$P_i=p_i-q_i, \qquad Q_i=p_i^2-q_i^2, \qquad \Omega_i=p_i^3-q_i^3 \qquad (i=1,2) \qquad (13)$$

とおくと (12) は簡単化されて

$$a=\frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)} \qquad (14)$$

となる.

【ロンスキアン表現】 ロンスキアンを用いた2ソリトンの表現は (第7講(20)参照)

$$\tau=\begin{vmatrix} f_1 & \partial f_1/\partial x \\ f_2 & \partial f_2/\partial x \end{vmatrix} \tag{15}$$

で与えられる．ただし f_1, f_2 は

$$\frac{\partial f_i}{\partial y}=\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial t}=\frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} \qquad (i=1,2) \tag{15'}$$

を満足するものとする．具体的には

$$f_1=e^{\xi_1}+e^{\eta_1}, \qquad f_2=e^{\xi_2}+e^{\eta_2} \tag{16}$$

ここで

$$\xi_1=p_1x+p_1^2y+p_1^3t+\delta_1, \qquad \eta_1=q_1x+q_1^2y+q_1^3t+\varepsilon_1$$
$$\xi_2=p_2x+p_2^2y+p_2^3t+\delta_2, \qquad \eta_2=q_2x+q_2^2y+q_2^3t+\varepsilon_2 \tag{16'}$$

（これらが（15′）を満たすことに注意せよ）とすればよい．

【証明】（16）を（15）に入れれば

$$\begin{aligned}\tau&=(e^{\xi_1}+e^{\eta_1})(p_2e^{\xi_2}+q_2e^{\eta_2})-(p_1e^{\xi_1}+q_1e^{\eta_1})(e^{\xi_2}+e^{\eta_2})\\&=(q_2-q_1)e^{\eta_1+\eta_2}\left\{1+\frac{q_2-p_1}{q_2-q_1}e^{\xi_1-\eta_1}+\frac{p_2-q_1}{q_2-q_1}e^{\xi_2-\eta_2}+\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1}e^{\xi_1+\xi_2-\eta_1-\eta_2}\right\}\end{aligned} \tag{17}$$

となるが，ここで

$$e^{\delta_1-\varepsilon_1}=\frac{q_2-q_1}{q_2-p_1}, \qquad e^{\delta_2-\varepsilon_2}=\frac{q_2-q_1}{p_2-q_1} \tag{18}$$

とおき，さらに（13）の置き換えをすれば（17）は

$$\begin{aligned}\tau=(q_2-q_1)e^{\eta_1+\eta_2}\Big\{&1+e^{P_1x+Q_1y+\Omega_1t}+e^{P_2x+Q_2y+\Omega_2t}\\&+\frac{(p_2-p_1)(q_2-q_1)}{(q_2-p_1)(p_2-q_1)}e^{(P_1+P_2)x+(Q_1+Q_2)y+(\Omega_1+\Omega_2)t}\Big\}\end{aligned} \tag{19}$$

となる．この右辺の $\{\cdots\}$ は（11），（14）と同じである．よって（15）は2ソリトン解を与えることがわかる． ∎

【注意】　とくに $q_i=-p_i(i=1,2)$ とおけば（13）により $Q_i=0(i=1,2)$ となり，（19）は y 依存性がなくなって，第7講（24）と同等な式を与える．

Tea Time

2次元 KdV 方程式

質問　なぜ KP 方程式を2次元 KdV 方程式というのですか.

答　KP 方程式はカドムチェフ (B. B. Kadomtsev) とペトビアシュビリ (V. I. Petviashvili) によって，1次元ソリトンの横方向の摂動に対する浅水波 (KdV 波) の安定性を議論するために用いられた方程式 (1970年) で，x 軸に対して少し y 軸へ傾いた方向に進行する波を扱ったものです．y 方向が少し入っているので2次元というわけです．浅水波としての KdV 方程式は速さ $c_0=\sqrt{gh}$ で進む座標系 $\xi=x-c_0t$ でみている方程式ですから，地面からみると

$$\frac{\partial u}{\partial t}-c_0\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

となるわけです．x で微分すれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-c_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$$

ここで第2項の $c_0{}^2\,\partial^2u/\partial x^2$ を2次元的にすれば

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}-c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)u+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-c_0\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

となります．ここで動く座標系 $\xi=x-c_0t$ に戻れば

$$\frac{\partial u}{\partial\xi\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial\xi}\left(u\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\beta\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^4}-c_0\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

となって KP 方程式の形になります．

第 22 講

KP 方程式の N ソリトン解

—テーマ—

- ◆ N ソリトン解
- ◆ プリュッカーの関係式
- ◆ Tea Time: 箱と球の系

N ソリトン解

前講の扱いを一般化して N ソリトン解を調べよう．KP 方程式

$$(-4u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+3u_{yy}=0 \tag{1}$$

に対して

$$u=2(\log\tau)_{xx} \tag{2}$$

とおくと，前講（5）により，τ は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}(\tau_{xxxx}-4\tau_{xt}+3\tau_{yy})\tau-4(\tau_{xxx}-\tau_t)\tau_x\\ +3(\tau_{xx}-\tau_y)(\tau_{xx}+\tau_y)=0\end{aligned} \tag{3}$$

【N ソリトン解】（1）の解はロンスキアン行列式

$$\tau=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ f_2 & f_2' & \cdots & f_2^{(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N & f_N' & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \tag{4}$$

で与えられる．ただしここで $f_i'=\dfrac{\partial f_i}{\partial x}$，

$$f_i^{(n)}=\frac{\partial^n f_i}{\partial x^n} \qquad \begin{matrix}(i=1,2,\cdots,N)\\(n=1,2,\cdots)\end{matrix} \tag{5}$$

であり，$f_i(x,y,t)$ は

$$\frac{\partial f_i^{(n)}}{\partial y}=\frac{\partial^2 f_i^{(n)}}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial f_i^{(n)}}{\partial t}=\frac{\partial^3 f_i^{(n)}}{\partial x^3} \tag{6}$$

を満たすものとする．たとえば $f_i=e^{\xi}+\cdots$，$\xi=ax+a^2y+a^3t$ など（前講参照）．このとき（4）は（3）を満たし，KP 方程式（1）の解は

$$u=2(\log\tau)_{xx} \tag{7}$$

で与えられる．

【証明】 ここではこれを証明するため，$N=2,3$ の場合について吟味しよう．

1. $N=2$ の場合．この場合（4）は

$$\tau=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial f_i^{(n)}}{\partial y}=\frac{\partial^2 f_i^{(n)}}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial f_i^{(n)}}{\partial t}=\frac{\partial^3 f_i^{(n)}}{\partial x^3} \qquad (i=1,2) \tag{8}$$

となる．まず τ を x で微分する．行列式の微分は各列を微分したものの和である．また同じ列が 2 つある行列式は 0 である．たとえば

$$\begin{vmatrix} f_1' & f_1' \\ f_2' & f_2' \end{vmatrix}=0 \tag{9}$$

したがって

$$\tau_x=\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' \\ f_2 & f_2'' \end{vmatrix} \tag{10}$$

同様に

$$\tau_{xx}=\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' \\ f_2 & f_2''' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1' & f_1'' \\ f_2' & f_2'' \end{vmatrix}$$

$$\tau_{xxx}=\begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2^{(4)} \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} f_1' & f_1''' \\ f_2' & f_2''' \end{vmatrix} \tag{10'}$$

$$\tau_{xxxx}=\begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(5)} \\ f_2 & f_2^{(5)} \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} f_1' & f_1^{(4)} \\ f_2' & f_2^{(4)} \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} f_1'' & f_1''' \\ f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}$$

ここで$f^{(4)}$はfの4階微分，$f^{(5)}$は5階微分を表す．またyなどで微分すれば（6）により（2つの列を取り換えれば行列式はマイナスがつくので）

$$\begin{aligned}\tau_y&=\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' \\ f_2 & f_2''' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1'' & f_1' \\ f_2'' & f_2' \end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' \\ f_2 & f_2''' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_1' & f_1'' \\ f_2' & f_2'' \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{10''}$$

同様に

$$\tau_{yy}=\begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(5)} \\ f_2 & f_2^{(5)} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_1' & f_1^{(4)} \\ f_2' & f_2^{(4)} \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} f_1'' & f_1''' \\ f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}$$

$$\tau_t=\begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2^{(4)} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_1' & f_1''' \\ f_2' & f_2''' \end{vmatrix} \tag{10'''}$$

$$\tau_{xt}=\begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(5)} \\ f_2 & f_2^{(5)} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_1'' & f_1''' \\ f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}$$

を得る．これらにより（3）の各項は

$$\tau_{xxxx}-4\tau_{xt}+3\tau_{yy}=12\begin{vmatrix} f_1'' & f_1''' \\ f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}$$

$$\tau_{xxx}-\tau_t=3\begin{vmatrix} f_1' & f_1''' \\ f_2' & f_2''' \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$\tau_{xx}+\tau_y=2\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' \\ f_2 & f_2''' \end{vmatrix}$$

$$\tau_{xx}-\tau_y=2\begin{vmatrix} f_1' & f_1'' \\ f_2' & f_2'' \end{vmatrix}$$

となる．よって（4）の左辺の 1/12 を Δ と書くと

$$\Delta=\frac{1}{12}\{\tau(\tau_{xxxx}-4\tau_{xt}+3\tau_{yy})-4\tau_x(\tau_{xxx}-\tau_t)+3(\tau_{xx}+\tau_y)(\tau_{xx}-\tau_y)\} \quad (12)$$

$$=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1'' & f_1''' \\ f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' \\ f_2 & f_2'' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1' & f_1''' \\ f_2' & f_2''' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' \\ f_2 & f_2''' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1' & f_1'' \\ f_2' & f_2'' \end{vmatrix} \quad (13)$$

となる．最後の式は次々節で示すように1つの行列式のラプラス展開になっているが，これは恒等的に0の行列式である．すなわち

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' & f_1''' \\ f_2 & f_2' & f_2'' & f_2''' \\ 0 & f_1' & f_1'' & f_1''' \\ 0 & f_2' & f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}=f_1\begin{vmatrix} f_2' & f_2'' & f_2''' \\ f_1' & f_1'' & f_1''' \\ f_2' & f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}-f_2\begin{vmatrix} f_1' & f_1'' & f_1''' \\ f_1' & f_1'' & f_1''' \\ f_2' & f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}=0 \quad (14)$$

よって（7）はこの場合の解を与える．

2. $N=3$ の場合．この場合は

$$\tau=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial f_i^{(n)}}{\partial y}=\frac{\partial^2 f_i^{(n)}}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial f_i^{(n)}}{\partial t}=\frac{\partial^3 f_i^{(n)}}{\partial x^3} \quad (15)$$

とおいて同じような計算をすると（3）の左辺の 1/12 は

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2''' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3''' & f_3^{(4)} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1''' \\ f_2 & f_2' & f_2''' \\ f_3 & f_3' & f_3''' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2'' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3'' & f_3^{(4)} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3' & f_3^{(4)} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' & f_1''' \\ f_2 & f_2'' & f_2''' \\ f_3 & f_3'' & f_3''' \end{vmatrix} \quad (16)$$

これも次々節で示すように恒等的に0の行列式のラプラス展開になっている．すなわち

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' & 0 & f_1''' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2' & f_2'' & 0 & f_2''' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3' & f_3'' & 0 & f_3''' & f_3^{(4)} \\ 0 & 0 & f_1'' & f_1 & f_1''' & f_1^{(4)} \\ 0 & 0 & f_2'' & f_2 & f_2''' & f_2^{(4)} \\ 0 & 0 & f_3'' & f_3 & f_3''' & f_3^{(4)} \end{vmatrix}=0 \tag{17}$$

となって，Δは恒等的に0になる．したがって（15）はこの場合の解を与える．∎

プリュッカーの関係式

$N=2$の場合，(13)，(14) は

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1'' & f_1''' \\ f_2'' & f_2''' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' \\ f_2 & f_2'' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1' & f_1''' \\ f_2' & f_2''' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' \\ f_2 & f_2''' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1' & f_1'' \\ f_2' & f_2'' \end{vmatrix}=0 \tag{18}$$

であるが，これは行列式の恒等式で，プリュッカー（Plücker）の関係式と呼ばれるものである．(18) は微分の階数に着目すると

$$(f\ f')(f''\ f''')-(f\ f'')(f'\ f''')+(f\ f''')(f'\ f'')=0 \tag{19}$$

の形をしていることがわかる．

$N=3$の場合のプリュッカーの関係式は (16)，(17) から

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2''' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3''' & f_3^{(4)} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1''' \\ f_2 & f_2' & f_2''' \\ f_3 & f_3' & f_3''' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2'' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3'' & f_3^{(4)} \end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1^{(4)} \\ f_2 & f_2' & f_2^{(4)} \\ f_3 & f_3' & f_3^{(4)} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f_1 & f_1'' & f_1''' \\ f_2 & f_2'' & f_2''' \\ f_3 & f_3'' & f_3''' \end{vmatrix}=0 \tag{20}$$

この左辺の第1の行列式はすべて第1列が (f_1, f_2, f_3) なので，この列をfで表し，第2列 (f_1', f_2', f_3') をf'で表し，n階微分の列を$f^{(n)}$で表せば (20) は

$$(f\ f'\ f'')(f\ f'''\ f^{(4)})-(f\ f'\ f''')(f\ f''\ f^{(4)})$$
$$+(f\ f'\ f^{(4)})(f\ f''\ f''')=0 \tag{21}$$

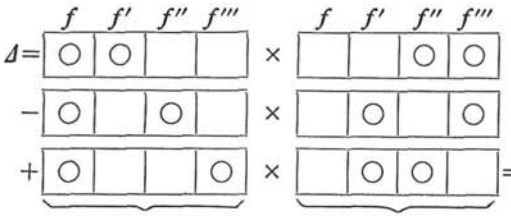
となる．

$N=2$の場合の (19) と$N=3$の場合の (21) を比べると，(20) の$f, f', \cdots$を

それぞれ $f', f'', \cdots$ で置き換えれば (21) の (…) の中の右の2つになることがわかる.

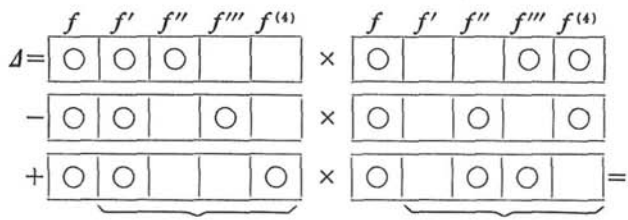
そこでこれらの場合プリュッカーの関係式は下のように図示できる.

$N=2$ の場合, (10), (11) は



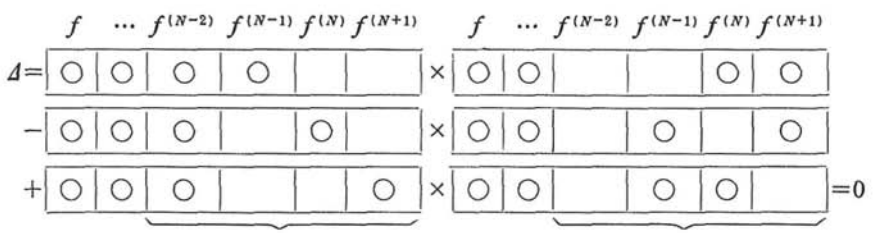
(22)

$N=3$ の場合, (13), (14) は



(22′)

これを一般化すると N ソリトン解はプリュッカーの関係式



(22″)

で表せることがわかる (このような図形はマヤ図形と呼ばれている).

【まとめ】 KP 方程式

$$(-4u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+3u_{yy}=0 \tag{23}$$

の N ソリトン解は

$$u=2\{\log \tau_N(x,y,t)\}_{xx} \tag{24}$$

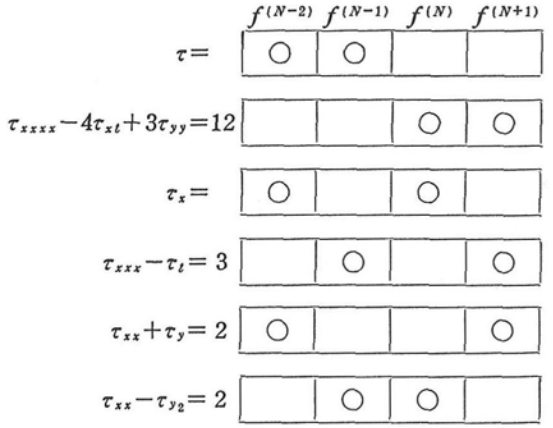
$$\tau_N=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ f_2 & f_2' & \cdots & f_2^{(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N & f_N' & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \tag{25}$$

で与えられる．ここに $f_i(x, x_2, x_3)\,(i=1, 2, \cdots, N)$ は

$$\frac{\partial f_i^{(n)}}{\partial y}=\frac{\partial^2 f_i^{(n)}}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial f_i^{(n)}}{\partial t}=\frac{\partial^3 f_i^{(n)}}{\partial x^3} \tag{26}$$

を満たす任意の関数である．

なお (22) の図形を用いると $N-3$ までの列を省略して（3）の各因子は



(27)

と書ける．

行列式の展開

前節に出てきた行列式の展開と行列式の値について補足をしておく．

【(13) は (14) のラプラス展開であること】 ラプラス展開は n 次の行列式を r 次の行列式と $n-r$ 次の行列式の積の和として表す．とくに4次の行列式を2次の行列式の積の和とするラプラス展開について述べておこう．4次の行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{28}$$

において上の2行に着目し，まず a_{11} と a_{12} の列で2次の行列式をつくり，この

とき省かれた列の下の2行を取って行列式をつくってかければ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{29}$$

を得る．同様にして上の2行の2つの列と，このとき省かれた列の下の行を取って，これらの行列式をかける．このようにして次のラプラス展開を得る．

$$\begin{aligned} \Delta = &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

これを (14) に当てはめれば (13) を得る．

【(16) の場合】 (16) が (17) の行列式 Δ のラプラス展開であることも同様である．(17) が0になることはわかりにくいが，たとえば (17) の左辺の Δ の第1列と第2列を取り換えて f_1', f_2', f_3' について展開すれば

$$\Delta = -\begin{vmatrix} f_1' & f_1 & f_1'' & 0 & f_1''' & f_1^{(4)} \\ f_2' & f_2 & f_2'' & 0 & f_2''' & f_2^{(4)} \\ f_3' & f_3 & f_3'' & 0 & f_3''' & f_3^{(4)} \\ 0 & 0 & f_1'' & f_1 & f_1''' & f_1^{(4)} \\ 0 & 0 & f_2'' & f_2 & f_2''' & f_2^{(4)} \\ 0 & 0 & f_3'' & f_3 & f_3''' & f_3^{(4)} \end{vmatrix} = f_1'\Delta_1 + f_2'\Delta_2 + f_3'\Delta_3 \tag{31}$$

となるが，実際に Δ_1 を計算すると0となり，同様に Δ_2, Δ_3 も0であることがわかる．

Tea Time

箱と球の系

たくさんの箱を1列に並べ，その中に有限個の球を入れておく（図46(a)）．この球にソリトンと似た運動をさせることができる．いわばソリトンのセルオート

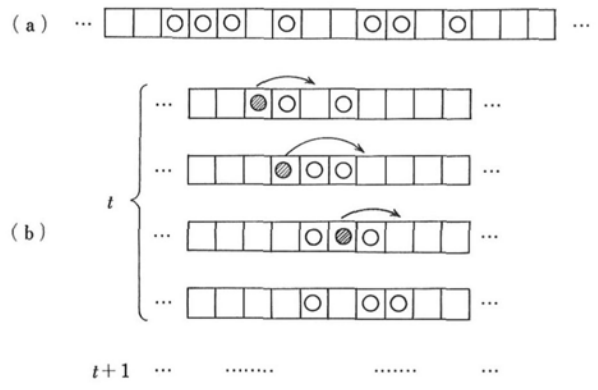


図 46

マトン模型である（各箱は球を1個だけ収納できるものとする）.

時間のステップごとに球を動かす．系の時間発展は次の原則に従うものとする（高橋大輔：日本物理学会誌，48, 37-40 (1993)）：

1）すべての球は時刻が t から $t+1$ に変わる際に必ず1回だけ移動する.

2）時刻 t で左のほうに位置する球から順に移動する．移動する先は自分が入っている箱より右側の，もっとも近くに存在する空箱である.

3）すべての球が移動し終わったら，時間を1だけ増す.

図bに簡単な例を示す．この時間発展は可逆であり，ソリトン系のダイナミックスのおもしろい例になっている.

第 23 講

2 次元戸田格子

—テーマ—

- ◆ 2 次元戸田格子
- ◆ ソリトン解
- ◆ Tea Time: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ と $\frac{\partial^2}{\partial x \partial s}$

2 次元戸田格子

2 次元の線形波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_0{}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

と書ける．ここで簡単のため $c_0=1$ とし，媒質が x 方向に非線形で不連続であるとするとき

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}=e^{-(u_n-u_{n-1})}-e^{-(u_{n+1}-u_n)}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \qquad (2)$$

という方程式が考えられる．書き直すとこれは

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=e^{-(u_n-u_{n-1})}-e^{-(u_{n+1}-u_n)} \qquad (3)$$

となる．この方程式で表される体系は 2 次元戸田格子と呼ばれている（誤解を招きやすい名称であるが）．

（1）の中の x と違う意味で新しく x と s を

$$\frac{t+y}{2}=x$$
$$\frac{t-y}{2}=s \tag{4}$$

で導入し，u_n を x と s の関数とみると

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial s}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial s}\right) \tag{4'}$$

したがって

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial s} \tag{4''}$$

となる．これを（2）の右辺に代入すれば（2）は

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial s}=e^{-(u_n-u_{n-1})}-e^{-(u_{n+1}-u_n)} \tag{5}$$

となる．2次元戸田格子はこの形で扱われることが多い．

u_n の差を

$$r_n=u_{n+1}-u_n \tag{5'}$$

とおくと（5）から

$$\frac{\partial^2 r_n}{\partial x\partial s}=2e^{-r_n}-e^{-r_{n-1}}-e^{-r_{n+1}} \tag{5''}$$

を得る．ここでさらに

$$e^{-r_n}-1=V_n \tag{6}$$

とおけば，(5″) は

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x\partial s}\log(1+V_n)=V_{n-1}-2V_n+V_{n+1}} \tag{7}$$

以下ではこの形で2次元戸田格子を考えることにしよう．

（7）を解くために

$$\boxed{V_n=\frac{\partial^2}{\partial x\partial s}\log\tau_n} \tag{8}$$

とおくと（7）は

$$1+\frac{\partial^2}{\partial s\partial\tau}\log\tau_n=\frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2} \tag{9}$$

書けるので，左辺の数分を実行すると

$$\boxed{(\tau_n)_{xs}\tau_n-(\tau_n)_s(\tau_n)_x-(\tau_{n-1}\tau_{n+1}-\tau_n^2)=0} \tag{10}$$

を得る(添え字の x と s は x と s に関する微分を表す).

ソリトン解

まず

$$\tau_n=q^ne^{qx-q^{-1}s} \tag{11}$$

とおくと，これは (10) を満たすが，(8) により $V_n=0$ を与えてしまう．そこで

$$\tau_n=q^ne^{qx-q^{-1}s}+p^ne^{px-p^{-1}s} \tag{12}$$

とおくと，これは (10) を満足する．そしてソリトン解

$$V_n=\frac{(p-q)^2}{4pq}\operatorname{sech}^2\left(\frac{p-q}{2}x-\frac{p^{-1}-q^{-1}}{2}s+kn\right) \tag{13}$$

ただし

$$e^k=\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} \tag{13'}$$

を与える．

【証明】 (12) から

$$\begin{aligned}(\tau_n)_x&=q^{n+1}e^{qx-q^{-1}s}+p^{n+1}e^{px-p^{-1}s}=\tau_{n+1}\\(\tau_n)_s&=-q^{n-1}e^{qx-q^{-1}s}-p^{n-1}e^{px-p^{-1}s}=-\tau_{n-1}\\(\tau_n)_{xs}&=-q^ne^{qx-q^{-1}s}-p^ne^{px-p^{-1}s}=-\tau_n\end{aligned} \tag{14}$$

したがって (12) は (10) を満足する．さらに (12) を書き換えると

$$\tau_n=q^ne^{qx-q^{-1}s}\left\{1+\left(\frac{p}{q}\right)^ne^{(p-q)x-(p^{-1}-q^{-1})s}\right\} \tag{15}$$

となる．この対数を取って x と s で微分すれば，(15) の右辺の因子 $q^ne^{qx-q^{-1}s}$ は (8) に寄与しないので

$$V_n=\frac{\partial^2}{\partial s\partial x}\log\left\{1+\left(\frac{p}{q}\right)^ne^{(p-q)x-(p^{-1}-q^{-1})s}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\ \frac{(p/q)^n(p-q)}{e^{-(p-q)x+(p^{-1}-q^{-1})s}+\left(\frac{p}{q}\right)^n}$$

$$=-\left(\frac{p}{q}\right)^n(p-q)(p^{-1}-q^{-1})\frac{e^{-(p-q)x+(p^{-1}-q^{-1})s}}{\left\{e^{-(p-q)x+(p^{-1}-q^{-1})s}+\left(\frac{p}{q}\right)^n\right\}^2} \tag{16}$$

これを書き直せば (13) が得られる. ∎

【注意】 (16) は (7) の解である. そこで変換式 (4) を用いて (16) の変数 x,s をもとの t,y に戻すと, (16) は

$$u_n=\frac{(p-q)^2}{4pq}\operatorname{sech}^2\left(\frac{p-q+p^{-1}-q^{-1}}{4}y+\frac{p-q-p^{-1}+q^{-1}}{4}t+kn\right) \tag{17}$$

となる. ここで (13) を考慮しながら

$$p=q^{-1},\qquad e^k=p \tag{18}$$

とすると y の依存性は消えて

$$u_n=\left(\frac{p-p^{-1}}{2}\right)^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{p-p^{-1}}{2}t+kn\right)$$

$$=\beta^2\operatorname{sech}^2(kn+\beta t),\qquad \beta=\sinh k \tag{19}$$

となる. これはふつうの戸田格子のソリトン解である.

2ソリトン解

2ソリトン解は, ロンスキアン表現で

$$\tau_n=\begin{vmatrix}\phi_1(n) & \{\phi_1(n)\}_x\\ \phi_2(n) & \{\phi_2(n)\}_x\end{vmatrix} \tag{20}$$

の形で与えられる. ただし $\phi_i(n)\ (i=1,2)$ は

$$\frac{\partial\phi_i(n)}{\partial x}=\phi_i(n+1)$$

$$\frac{\partial\phi_i(n)}{\partial s}=-\phi_i(n-1) \tag{21}$$

を満足するものとする. このため (20) は

$$\tau_n=\begin{vmatrix}\phi_1(n) & \phi_1(n+1)\\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1)\end{vmatrix} \tag{22}$$

と書くこともできる ((12) は (21) の性質をもつことに注意).

【証明】 (22) が (10) を満足することを示せばよい．(22) から (21) と行列式の性質を用いて

$$
\begin{aligned}
(\tau_n)_x &= \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix} \\
(\tau_n)_s &= -\begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} \\
(\tau_n)_{xs} &= -\begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix} \qquad (23) \\
\tau_{n-1} &= \begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n) \end{vmatrix} \\
\tau_{n+1} &= \begin{vmatrix} \phi_1(n+1) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n+1) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

よって (10) の左辺は

$$
\begin{aligned}
&-\begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} \\
&+\begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix} \\
&-\begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \phi_1(n+1) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n+1) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix} \\
&+\begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} \\
=&-\begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} \\
&+\begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n+1) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n+1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix} \\
&-\begin{vmatrix} \phi_1(n-1) & \phi_1(n) \\ \phi_2(n-1) & \phi_2(n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \phi_1(n+1) & \phi_1(n+2) \\ \phi_2(n+1) & \phi_2(n+2) \end{vmatrix} \\
=&-\begin{vmatrix} f_1 & f_1''' \\ f_2 & f_2''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1' & f_1'' \\ f_2' & f_2'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_1'' \\ f_2 & f_2'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1' & f_1''' \\ f_2' & f_2''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1'' & f_1''' \\ f_2'' & f_2''' \end{vmatrix} \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる．ただしここで $\phi_i(n-1)$ などが x の関数であることに着目して $f_i=f_i(x)$ などと書き，その x 微分を f_i' などと書いた．すなわち (21) により

$$\phi_i(n-1)=f_i, \qquad \phi_i(n)=f_i'=\frac{\partial f_i}{\partial x}$$
$$\phi_i(n+1)=f_i'', \qquad \phi_i(n+2)=f_i''' \tag{25}$$

と書いた．こうしてみると第22講ですでに述べたように (24) は行列式の一般的性質，すなわちプリュッカーの関係式 ((24) は第22講 (13) の右辺の符号を変えたものとまったく同じ形である) により恒等的に0であり，したがって (10) が満足されることがわかる．∎

Nソリトン解

前節を拡張すれば，Nソリトン解がただちに求められる．これは行列式

$$\tau_n=\begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) & \cdots & \phi_1(n+N-1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) & \cdots & \phi_2(n+N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_N(n) & \phi_N(n+1) & \cdots & \phi_N(n+N-1) \end{vmatrix} \tag{26}$$

ただし $\phi_i(n)$ は，n および x と s の関数で

$$\frac{\partial \phi_i(n)}{\partial x}=\phi(n+1)$$
$$\frac{\partial \phi_i(n)}{\partial s}=-\phi(n-1) \tag{26'}$$

を満たすものとする．

なお (26) はカソラチ (Casorati) 行列式と呼ばれている．

【注意】 (26′) の第1式の性質を用いれば (26) はロンスキアンの形で

$$\tau_n=\begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1'(n) & \cdots & \phi_1^{(N-1)} \\ \phi_2(n) & \phi_2'(n) & \cdots & \phi_2^{(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_N(n) & \phi_N'(n) & \cdots & \phi_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \tag{27}$$

と書ける．ただし $\phi_i'(n)=\partial\phi_i(n)/\partial x, \cdots, \phi_i^{(N-1)}(n)=\partial^{N-1}\phi_i(n)/\partial x^{N-1}$ である．この式で τ_n が y によらないという制限をつければ (27) はふつうの戸田格子方程式の Nソリトン解のロンスキアン表現を与える．

Tea Time

$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ と $\frac{\partial^2}{\partial x \partial s}$

変換

$$\frac{t+y}{2}=x, \qquad \frac{t-y}{2}=s \qquad (1)$$

は45° の角度で交わる2つの直交座標系の間の変換である（図47）.

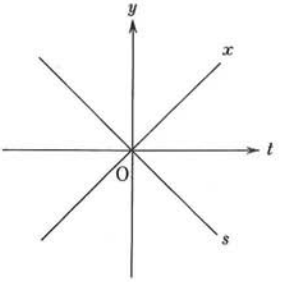


図 47

ある関数 f が y によらず t だけの関数であるとき，t 方向の微分は $y=0$ 方向の微分だから（1）で $y=0$ とおくと $t/2=x$，$t/2=s$ となるから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{1}{4}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial s} \qquad (2)$$

となるように思うかもしれないが，これは正しくない.

正しい微分は

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}=\frac{\partial f(x,s)}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\ \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\right) \qquad (3)$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial s}\right) \qquad (3')$$

であり，これらの和と差から

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s} \qquad (4)$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \qquad (5)$$

となる.

したがってとくに f が y によらなければ

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}=\frac{\partial f(x+s)}{\partial x \partial s} \qquad (6)$$

となる．これが正しく，（2）は誤りである.

(1) を

$$t=x+s, \qquad y=x-s$$

と書いても当然同じである.

$$\frac{\partial f(x,s)}{\partial x}=\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\ \frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}$$

これらをかけ合わせて

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial s}=\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

第24講

可積分系と非可積分系

—テーマ—

- ◆ エノン-ハイレス系
- ◆ 3粒子非線形格子
- ◆ Tea Time: 星と日本文化

非可積分系のカオス

いままでソリトン解をもつ多くの体系，数学的モデルを調べてきた．ある体系を数値的に解いたときソリトンらしいものが発見された場合，あるいは体系の1ソリトン解が得られた場合，安定した集団運動の存在はおそらく，その体系が積分可能系であることを示していると予想される．しかし非線形方程式は一般的にはカオスであることが期待され，積分可能系はやはり特別のものであるとするならば，積分可能系とカオス的な体系との違いを少数の自由度の体系で調べることは興味のあることである．これに関連して次に述べるエノン-ハイレス（Hénon-Heiles）系を調べることにしよう．

エノン-ハイレス系

エノン（M. Hénon）はフランスのニースにある天文台の人であるが，軸対称な銀河（不動の重力場と考える）の中の1個の星の運動にいわゆる第3積分（エネルギー，角運動量などのよく知られた積分以外の保存量）があるかどうかを調

べた．天文学者はケプラー以来，宇宙の安定性に重大な関心をもってきた（最近は不安定性に関心事が移ったようである）．

軸対称の重力場の中の1個の星の運動を考え，そのハミルトニアンHを円柱座標(r,θ,z)で表し，これらの方向の運動量をp_r,p_θ,p_zとすると

$$H=\frac{1}{2}\left(p_r{}^2+\frac{p_\theta{}^2}{r^2}+p_z{}^2\right)+\Phi(r,z) \qquad (1)$$

と書ける．$\Phi(r,z)$はこの銀河による位置エネルギーである．エネルギー積分は

$$I_1=H \qquad (2)$$

であり，角運動量積分

$$I_2=p_\theta=r^2\dot{\theta}=h\ (\text{一定}) \qquad (3)$$

である．これを考慮して（1）を

$$H=\frac{1}{2}(p_r{}^2+p_z{}^2)+U(r,z) \qquad (4)$$

ただし

$$U(r,z)=\frac{1}{2}\ \frac{h^2}{r^2}+\Phi(r,z) \qquad (5)$$

と書こう．（5）の右辺第1項$h^2/2r^2$は遠心による項であり，これを含めた有効ポテンシャル$U(r,z)$は$r=r_c$，$z=0$で極小値をとるとする．すなわち

$$\frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{h^2}{r^3}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0 \qquad (r=r_c,\ z=0) \qquad (6)$$

このようにUが極小になるところがなければ問題にしている星はこの銀河に束縛されずに飛び去ってしまう．

Uを$r=r_c$の近くで展開して（U_c,a_0,c_0,c_1などは定数）

$$U=U_c+\frac{1}{2}a_0(r-r_c)^2+\frac{1}{2}c_0z^2+a_1(r-r_c)z^2-c_1(r-r_c)^3+\cdots \qquad (7)$$

とする（銀河は$z=0$の面の上下で対称とする）．

ハミルトンの運動方程式は（7）の右辺を5項でとめると

$$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}=p_z$$

$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=p_r \qquad (8)$$

$$\dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=-c_0z-2a_1(r-r_c)z$$

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=-a_0(r-r_c)-a_1z^2+3c_1(r-r_c)^2$$

となる．ここで適当な尺度変換を行い，$(z,r)\to(q_1,q_2)$, $(p_z,p_r)\to(p_1,p_2)$ とする．エノンはこうして

$$\frac{dq_1}{dt}=p_1,\qquad \frac{dq_2}{dt}=p_2$$

$$\frac{dp_1}{dt}=-q_1-2q_1q_2 \tag{9}$$

$$\frac{dp_2}{dt}=-q_2-q_1^2+q_2^2$$

で決められる運動を考えた．これはハミルトニアンを

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+U(q_1,q_2)$$

$$U(q_1,q_2)=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)+q_1^2q_2-\frac{1}{3}q_2^3 \tag{10}$$

としたことになる．

このポテンシャルは正3角形の対称性をもつ．これを示すには

$$q_1=r\cos\theta,\qquad q_2=r\sin\theta \tag{11}$$

とおけばよい．このときポテンシャル U は

$$U=\frac{1}{2}r^2+\frac{r^3}{3}\sin 3\theta \tag{12}$$

となる．$q_1=0$, $q_2=1$ において $\partial U/\partial q_1=\partial U/\partial q_2=0$ であり，この点を含む正3角形の頂点が U の峠（鞍部点）である．峠における U の値は $E_c=1/6=0.1666\cdots$ であり，エネルギーが E_c よりも低ければ運動はポテンシャルの谷の中で行われるが，E_c を越えると峠を通って外へ出てしまうことも可能である．

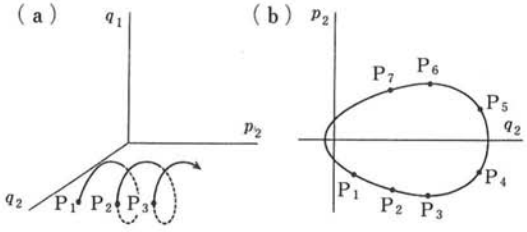


図 48

運動は（9）によって定

まり，位置と運動量から成る位相空間 (q_1, q_2, p_1, p_2) の中の軌道として与えられる．これは4次元空間なので直接図示できないから，平面で切って軌道との交わりを図示する．これをポアンカレ (Poincaré) 写像という．ここでは $q_1=0$ を通り q_2, $p_2(=\dot{q}_2)$ の2軸を含む平面を軌道が $p_1>0$ の向きに切る点 $P_1, P_2, \cdots$ を (q_2, p_2) 面上にプロットし，これらの点がなめらかな曲線の上に乗るときは，この曲線も図示する（図48）．数値計算の結果を図49に示す．

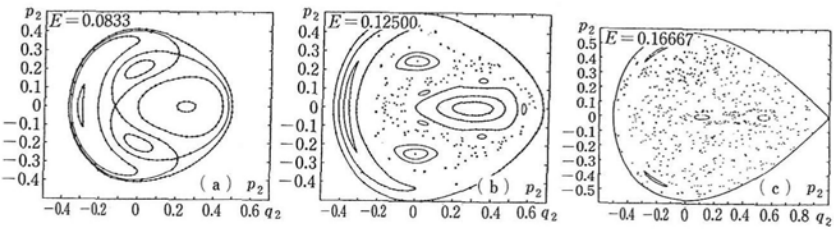


図49

$E=1/12=0.08333\cdots$ のとき $P_1, P_2, \cdots$ はなめらかな曲線の上に乗る．これは軌道が超曲面の上にあることを意味し，この超曲面は少なくとも近似的に運動の積分（第3積分）である．$E=1/8=0.12500$ に上げると運動領域はなめらかな曲線で覆われた部分とそうでない部分（カオス的な領域）に分かれる．カオス的な領域の多数点は1つの初期条件から出発した軌道が切る点のプロットである．さらにエネルギーを $E=1/6=0.1666\cdots$ に上げるとほとんどすべての領域がカオス的になる．

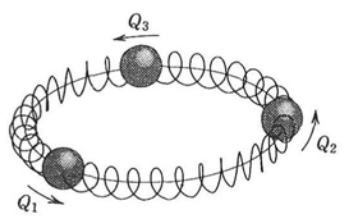


図50

3粒子の周期格子

【1.　線形格子】 図50のように環状に3粒子が並んだ周期系を考える．粒子間のばねがフックの法則に従う線形のばねであるとき，ハミルトン関数は

$$H_0=\frac{1}{2}(P_1^2+P_2^2+P_3^2)+\frac{1}{2}\{(Q_1-Q_2)^2+(Q_2-Q_3)^2+(Q_3-Q_1)^2\} \qquad (13)$$

と書ける．これは主軸変換

$$Q_i=\sum^{3} A_{ij}\zeta_j$$

$$P_i=\sum_{j=1}^{3} A_{ij}\eta_j \qquad (i=1,2,3) \tag{14}$$

ただし

$$A=\begin{pmatrix} 6^{-1/2} & 2^{-1/2} & 3^{-1/2} \\ -(2/3)^{1/2} & 0 & 3^{-1/2} \\ 6^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{14'}$$

によって

$$H_0=\frac{1}{2}(\eta_1{}^2+\eta_2{}^2+\eta_3{}^2)+\frac{3}{2}(\zeta_1{}^2+\zeta_2{}^2) \tag{15}$$

となる．ζ_3 は H_0 に現れない（循環座標）．これは全運動量 $P_1+P_2+P_3=\sqrt{3}\,\eta_3$ が保存されることに対応する．

【2.　3次の非線形項のある格子】 強さ α の非線形項を付け加えて

$$H=H_0+\frac{\alpha}{3}\{(Q_1-Q_2)^3+(Q_2-Q_3)^3+(Q_3-Q_1)^3\} \tag{16}$$

とする．これに（14）の変換を行うと（15）は

$$H=\frac{1}{2}(\eta_1{}^2+\eta_2{}^2+\eta_3{}^2+3\zeta_1{}^2+3\zeta_2{}^2)+\frac{3\alpha}{\sqrt{2}}\left(\zeta_2\zeta_1{}^2-\frac{1}{3}\zeta_2{}^3\right) \tag{16'}$$

となる．η_3 は運動の定数であるからこれを除外すると運動方程式は

$$\dot{\zeta}_1=\frac{\partial H}{\partial \eta_1}=\eta_1, \qquad \dot{\zeta}_2=\frac{\partial H}{\partial \eta_2}=\eta_2$$

$$\dot{\eta}_1=-\frac{\partial H}{\partial \zeta_1}=-3\zeta_1-3\sqrt{2}\,\alpha\zeta_1\zeta_2 \tag{17}$$

$$\dot{\eta}_2=-\frac{\partial H}{\partial \zeta_2}=-3\zeta_2-\frac{3\alpha}{\sqrt{2}}(\zeta_1{}^2-\zeta_2{}^2)$$

となる．ここで尺度変換

$$\zeta_1=\frac{\sqrt{2}}{\alpha}q_1, \qquad \zeta_2=\frac{\sqrt{2}}{\alpha}q_2, \qquad t=\frac{1}{\sqrt{3}}\tau \tag{18}$$

を行えば運動方程式（17）は

$$\frac{dq_1}{d\tau}=\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\eta_1\equiv p_1, \qquad \frac{dq_2}{d\tau}=\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\eta_2\equiv p_2$$

$$\frac{dp_1}{d\tau}=-q_1-2q_1q_2 \tag{19}$$

$$\frac{dp_2}{d\tau}=-q_2-{q_1}^2+{q_2}^2$$

となる．この式はエノン-ハイレス系の運動方程式（9）とまったく同形である．したがってこの非線形格子の運動は一般にカオス的であり，この体系は積分不可能であることがわかる．

【3.　戸田格子】　3粒子から成る周期的戸田格子のハミルトン関数は

$$H=\frac{1}{2}({P_1}^2+{P_2}^2+{P_3}^2)+e^{-(Q_2-Q_1)}+e^{-(Q_3-Q_2)}+e^{-(Q_1-Q_3)}-3 \qquad (20)$$

と書ける（最後の項−3は運動がないとき，すなわち $P_i=Q_i=0\,(i=1,2,3)$ のときに $H=0$ になるように付け加えた）．この式で Q_2-Q_1 などがすべて小さいとして右辺を展開し，3次まで取れば（16）の非線形格子（$\alpha=1/2$）になり，2次までで止めれば線形格子（13）になる．（20）に変換（14）を行い，また尺度変換（18）を加えるとエネルギーは

$$E=\frac{1}{2}({p_1}^2+{p_2}^2)+\frac{1}{24}\{\exp(2q_2+2\sqrt{3}q_1)+\exp(2q_2-2\sqrt{3}q_1)$$
$$+\exp(-4q_2)\}-\frac{1}{8} \qquad (21)$$

となり，運動方程式は

$$\frac{dq_1}{d\tau}=p_1,\qquad \frac{dq_2}{d\tau}=p_2$$
$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\{-\exp(2q_2+2\sqrt{3}q_1)+\exp(2q_2-2\sqrt{3}q_1)\} \qquad (22)$$
$$\frac{dp_2}{dt}=\frac{1}{6}\exp(-4q_2)-\frac{1}{12}\{\exp(2q_2+2\sqrt{3}q_1)+\exp(2q_2-2\sqrt{3}q_1)\}$$

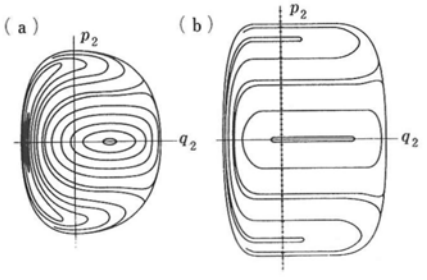


図 51
a：$E=1$，b：$E=256$.

となる（これらの式で q_1, q_2 が小さいとして展開し，2次で打ち切ると（19）になることに注意）．

（22）を数値的に解いた結果を図51に示す．これは軌道を q_2 と p_2 を含む面で切ったポアンカレ写像である．この場合，エネルギー E をいくら上げても軌道はつねになめらかな曲線の上

に乗っていて，この体系が積分可能系であることを明白に示している．

Tea Time

星と日本文化

コペルニクスやケプラーを思い出すまでもなく，星や月などの動きに対する興味は科学が芽生えるもとになった．メソポタミアやエジプトでは天体観測が早くから行われ，天動説と地動説は大きな議論となったし，ガリレイの望遠鏡による観測は詩人たちの関心を引き付けた．

そういう西欧の文化に比べると，むかしの日本人はほとんど天体に対して関心がなかったように思われる．『万葉集』以来の日本の文学には月はたいへんしばしば読まれているが，これはまったく情緒的な対象としての月である．「星はすばる」（清少納言）といっても，これは美の世界のことである．日本民族は七夕の話以外には星に対してほとんど何の興味も示していない，七夕の話も年に1度しか逢えない牽牛星と織女星に対する同情以外のものではない，としたあと大岡信氏は次のように述べている．

「日本人は月を別にすれば天体にはまるで関心が向かなかった民族だということができるでしょう．その月にしても，多くの場合，人事とのからみで興味をもたれているので，つまりこれは，われわれが長い間，空に浮かぶ天体に対して，科学的にも哲学的にも関心をもたないで来たことを意味するのだといえるでしょう．特筆すべき大事件とも思えませんが，少々がっかりすることではあります」

『万葉集』に

天の海雲の波立ち月の船星の林に漕ぎ隠る見ゆ

柿本朝臣人麿の歌集（『万葉集』巻七）

という歌がある．

第25講

球面振り子

—テーマ—

- ◆ 自由度と保存量の個数
- ◆ 球面振り子
- ◆ Tea Time: ヤコビの楕円関数

自由度と保存量

一端のまわりに自由に回る軽い棒の先端におもりを付けてこれを振らせると，おもりは重力を受けながら球面上を運動する．これを球面振り子という．重力場の中でなめらかな球面上を運動する質点の運動と同じである．

球面の半径を l とし，鉛直上向きの方向を極軸とする球座標を用いれば，質量 m のおもりの運動エネルギーは

$$K=\frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \qquad (1)$$

位置エネルギーは

$$U=mgl\cos\theta \qquad (2)$$

である．したがってラグランジュ関数は

$$L=\frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-mgl\cos\theta \qquad (3)$$

となる．

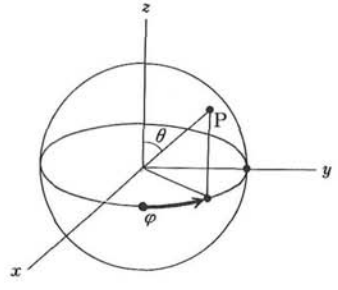


図52

L は φ を含まないので $\partial L/\partial\varphi=0$ であり，ラグランジュの運動方程式の φ 成分 $d(\partial L/\partial\dot{\varphi})/dt=\partial L/\partial\varphi$ は

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=mh\ (\text{一定}) \tag{4}$$

を与える．これは角運動量の z 成分

$$\boxed{M_z=ml\sin\theta\cdot\dot{\varphi}l\sin\theta=mh} \tag{5}$$

を意味する．あるいは水平面内の運動量のモーメントの保存である．エネルギー保存の式

$$\boxed{E=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+mgl\cos\theta=\text{一定}} \tag{6}$$

も成り立つ．

この運動の自由度は2（θ と φ）である．上述の2つの保存則を連立させて $\dot{\theta}$ と $\dot{\varphi}$ について解き，$\dot{\theta}$ と $\dot{\varphi}$ をそれぞれ θ と φ の関数として求めたとすると，ある時刻の θ と φ を与えたときに任意時間後の θ と φ の位置が積分で定まることになるので，運動は決定されることになる．このように自由度が2の場合は2つの保存量が求まれば運動は解ける．自由度が1の場合はエネルギーの保存則だけで運動が定まることは明らかなことである．一般に自由度が f のハミルトン系では，ある制限を満たす f 個の保存量（積分ともいう）が求まれば運動は原理的に解けたことになる（第13講参照）．

「原理的に」というのはたとえば自由度2の場合，$\dot{\theta}=F(\theta,\varphi)$，$\dot{\varphi}=G(\theta,\varphi)$ と書けたとしてもこれから θ と φ を時間の関数としてわかりやすく表現するのは必ずしも容易ではないからである．

球面振り子の運動の解

球面振り子の場合は上の2つの保存量（4）と（6）は φ を含まないので，$\dot{\varphi}$ を消去すれば $\dot{\theta}$ は θ の関数として求められ，これを積分すれば θ が時間の関数として定まるので運動はたやすく解けるはずである．そこで（4）から $\dot{\varphi}$ を（6）

に代入すれば

$$E=\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2+\frac{mh^2}{2l^2\sin^2\theta}+mgl\cos\theta \tag{7}$$

よって

$$\dot{\theta}^2=\frac{2}{ml^2}\left(E-\frac{mh^2}{2l^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta\right) \tag{8}$$

これを積分すれば

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}l\int^{\theta}\frac{d\theta}{\left(E-\frac{mh^2}{2l^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta\right)^{1/2}} \tag{9}$$

さらにφを求めるには（4）から

$$d\varphi=\frac{h\,dt}{l^2\sin^2\theta}=\frac{h\,d\theta}{l^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}} \tag{10}$$

これと（8）から

$$\varphi=\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{h}{l}\int^{\theta}\frac{d\theta}{\sin^2\theta\left(E-\frac{mh^2}{2l^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta\right)^{1/2}} \tag{11}$$

を得る．

これらの積分をもっとみやすくするためには

$$z=l\cos\theta \tag{12}$$

とおけばよい．この置き換えにより（9）は

$$\begin{aligned}\frac{t}{l}&=\int^{z}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\\ f(z)&=2(l^2-z^2)\left(\frac{E}{m}-gz\right)-h^2\end{aligned} \tag{13}$$

となる．

$f(z)$はzの3次式であるから，(13) の積分は一般に楕円積分となる．$f(z)=0$の根をz_1, z_2, z_3とすれば

$$f(z)=2g(z-z_1)(z_2-z)(z_3-z) \tag{14}$$

と書ける．ここで

$$z=z_1+(z_2-z_1)\sin^2x \tag{15}$$

とおき，$t=0$で$z=z_1$，$x=0$とすれば (13) は

$$\frac{t}{a}=\sqrt{\frac{2}{g(z_3-z_1)}}\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}} \tag{16}$$

ただし

$$k^2=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}<1 \tag{17}$$

となる．さらに

$$y=\sin x \tag{18}$$

とおくと (16) の積分は

$$\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=\mathrm{sn}^{-1}y \tag{19}$$

と書ける．sn^{-1} はヤコビの楕円関数 sn（エスエヌ）の逆関数である．したがって (19) を (16) に入れて逆関数を取り (18) を考慮すれば (15) により

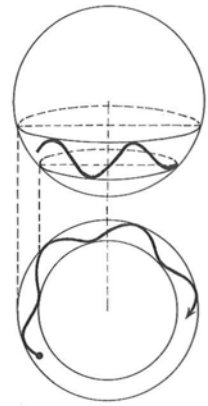


図 53

$$z=z_1+(z_2-z_1)\,\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{g(z-z_1)}{2}}\frac{t}{l}\right) \tag{20}$$

を得る．

Tea Time

ヤコビの楕円関数

ヤコビ（Jacobi）の楕円関数については『一般力学 30 講』の第 12 講にやや詳しく述べてある．しかし便宜のためここに簡単に述べておく．

3 角関数の sin は

$$y=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x$$

の逆関数として与えられる．このとき

$$x=\sin y$$

であり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\sqrt{1-x^2}=\cos y$$

したがって

$$\frac{d\sin y}{dy}=\cos y$$

楕円関数の $\mathrm{sn}\,y$（エスエヌ y と読む）は

$$y=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\mathrm{sn}^{-1}x$$

の逆関数として与えられる．このとき

$$x=\mathrm{sn}\,y$$

であり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}=\mathrm{cn}\,y\,\mathrm{dn}\,y$$

ただし $\mathrm{cn}\,y$，$\mathrm{dn}\,y$ は

$$1-x^2=1-\mathrm{sn}^2y=\mathrm{cn}^2y$$

$$1-k^2x^2=1-k^2\,\mathrm{sn}^2y=\mathrm{dn}^2y$$

によって定義される．したがって

$$\frac{d}{dy}\mathrm{sn}\,y=\mathrm{cn}\,y\,\mathrm{dn}\,y$$

さらに $\mathrm{cn}^2y=1-\mathrm{sn}^2y$ の微分から

$$\frac{d}{dy}\mathrm{cn}\,y=-\mathrm{sn}\,y\,\mathrm{dn}\,y$$

また $\mathrm{dn}^2y=1-k^2\,\mathrm{sn}^2y$ の微分から

$$\frac{d}{dy}\mathrm{dn}\,y=-k^2\,\mathrm{sn}\,y\,\mathrm{cn}\,y$$

$k\to 0$ で

$$\mathrm{sn}\,y\to\sin y,\qquad \mathrm{cn}\,y\to\cos y,\qquad \mathrm{dn}\,y\to 1$$

$k\to 1$ で

$$\mathrm{sn}\,y\to\tan y,\qquad \mathrm{cn}\,y\to\mathrm{sech}\,y,\qquad \mathrm{dn}\,y\to\mathrm{sech}\,y$$

第 26 講

剛体の回転

—テーマ—

- ◆ オイラーの角
- ◆ エネルギーと角運動量
- ◆ Tea Time: 太陽系はコマの群れ

剛体に固定した座標系

剛体の向き（配向）はこれに固定した座標系の配向によって示される．空間に静止した座標系を O-xyz とし，剛体に固定した座標系を O-$\xi\eta\zeta$ としよう（原点は一致させる）．ζ 軸が z 軸となす角を θ とし，$z\zeta$ 平面が zx 平面となす角を φ とする（θ, φ は ζ 軸の方向を決める極座標である）．さらに ζ 軸のまわりの剛体の回転角 ψ を決めれば剛体の配向は定まる．この角 ψ は図 54 のように ζ 軸に垂直な $\xi\eta$ 平面と xy 平面との交線 Oy' から η 軸までの角とする．剛体の配向は (θ, φ, ψ) で与えられる．

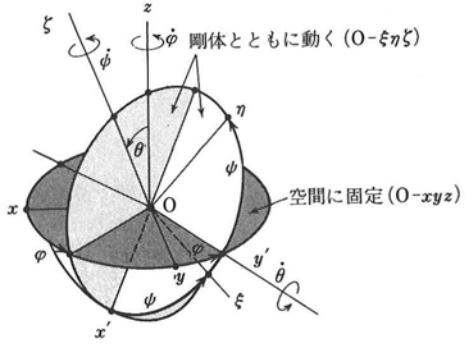


図 54　オイラー角 (θ, φ, ψ)

(θ, φ, ψ) をオイラー (Euler)

の角という．

空間に固定したO-xyz座標系と剛体に固定したO-$\xi\eta\zeta$系の間の角の余弦cos($\angle x\mathrm{O}\xi$)などをオイラーの角(θ,φ,ψ)で表すと次のようになる（証明は略す）．

表1

	x	y	z
ξ	$\cos\theta\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi$	$\cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$
η	$-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi$	$-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi$	$\sin\theta\sin\psi$
ζ	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$

たとえば

$$\begin{aligned} z&=-\xi\sin\theta\cos\psi+\eta\sin\theta\sin\psi+\zeta\cos\theta \\ \zeta&=x\sin\theta\cos\varphi+y\sin\theta\sin\varphi+z\cos\theta \end{aligned} \tag{1}$$

また任意のベクトル$\boldsymbol{a}$について

$$\begin{aligned} a_z&=-a_\xi\sin\theta\cos\psi+a_\eta\sin\theta\sin\psi+a_\zeta\cos\theta \\ a_\zeta&=a_x\sin\theta\cos\varphi+a_y\sin\theta\sin\varphi+a_z\cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

などが成り立つ．

角速度

剛体に固定した座標軸(ξ,η,ζ)のまわりの剛体の回転の速度（角速度）を用いると便利なことが多いので，これをそれぞれ$\omega_1,\omega_2,\omega_3$とし，これを静止した座標系$(\theta,\varphi,\psi)$のまわりの角速度$\dot\theta,\dot\varphi,\dot\psi$で表すと

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1&=\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \omega_2&=\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi \\ \omega_3&=\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta \end{aligned}} \tag{3}$$

となる．

【証明】 ω_1は$\dot\theta,\dot\varphi,\dot\psi$を表す矢印（それぞれO$y'$，$z$軸，$\zeta$軸方向の矢印）を$\xi$方向へ射影した成分の和で与えられる．まずO$y'$と$\xi$方向の間の角は$\pi/2-\psi$であるから$\dot\theta$の$\xi$方向への射影は$\dot\theta_\xi=\dot\theta\sin\psi$である．次に$z$方向にある$\dot\varphi$を$\xi\eta$面

へ射影すると $\dot{\varphi}\sin\theta$ であり，これをさらに ξ 方向へ射影したものは $\dot{\varphi}_\xi=-\sin\theta\cos\phi$ となる．$\dot{\psi}$ は ζ 方向にあるから $\dot{\psi}$ の ξ 方向への射影は $\psi_\xi=0$ である．よって ξ 方向の成分は

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_\xi&=\dot{\theta}\sin\phi\\ \dot{\varphi}_\xi&=-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\phi\\ \dot{\psi}_\xi&=0\end{aligned}\qquad(4)$$

であり，これらを加え合わせれば ω_1 は

$$\omega_1=\dot{\theta}\sin\phi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\phi\qquad(5)$$

で与えられることになる．

同様にして η 方向への射影は

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_\eta&=\dot{\theta}\cos\phi\\ \dot{\varphi}_\eta&=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\phi\\ \dot{\psi}_\eta&=0\end{aligned}\qquad(6)$$

これらを加え合わせれば

$$\omega_2=\dot{\theta}\cos\phi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\phi\qquad(7)$$

が得られる．さらに簡単に $\omega_3=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$ も示される．

重心の高さ

剛体の位置エネルギーは重心の高さで決まる．そのため重力で決まる上下の方向が重要であるから鉛直上方に z 軸をとり，(x, y, z) 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とし，剛体とともに動く座標軸 (ξ, η, ζ) 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta$ とする．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は静止し，$\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta$ は回転につれて変化する（図 55）．

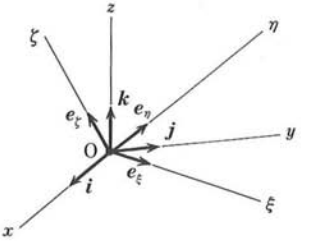


図 55

z 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ を O-$\xi\eta\zeta$ 系で表し

$$\boxed{\boldsymbol{k}=\gamma_1\boldsymbol{e}_\xi+\gamma_2\boldsymbol{e}_\eta+\gamma_3\boldsymbol{e}_\zeta}\qquad(8)$$

とすると，$\boldsymbol{k}$ は静止しているが $\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta$ の運動につれて $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ も時間とともに

変化する．オイラーの角で表すと表1の一番右の列から

$$\gamma_1=-\sin\theta\cos\phi$$
$$\gamma_2=\sin\theta\sin\phi \qquad (9)$$
$$\gamma_3=\cos\theta$$

となる．

剛体の重心の位置 $\boldsymbol{r}_G$ を O-$\xi\eta\zeta$ 系で表して

$$\boxed{\boldsymbol{r}_G=\xi_0\boldsymbol{e}_\xi+\eta_0\boldsymbol{e}_\eta+\zeta_0\boldsymbol{e}_\zeta} \qquad (10)$$

とすれば，重心の高さは

$$\boxed{z_G=\boldsymbol{r}_G\cdot\boldsymbol{k}=\gamma_1\xi_0+\gamma_2\eta_0+\gamma_3\zeta_0} \qquad (11)$$

となる．

エネルギーと角運動量の積分

1点を押さえられた剛体（コマ）の運動は，剛体に固定した座標系のオイラー角 (θ,φ,ψ) と角速度 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ で決まる自由度3の運動である．したがって3つの積分（保存量）が求まれば運動は決定できるが，2つの積分はただちに求められる．これらはエネルギーの保存と鉛直軸のまわりの角運動量の保存である．以下では支点を原点Oとし，ここを通る慣性主軸を ξ,η,ζ 軸に選ぶ．

【エネルギー】 証明を略すが主慣性モーメントを A,B,C とすると運動エネルギーは $\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2)$ であり，位置エネルギーは m を剛体の質量として mgz_G であるから (11) により全エネルギーの保存は

$$\boxed{\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2)+mg(\xi_0\gamma_1+\eta_0\gamma_2+\zeta_0\gamma_3)=\text{一定}} \qquad (12)$$

と書ける．

【鉛直軸のまわりの角運動量】 剛体の支点のまわりの角運動量を $\boldsymbol{L}$ とし，外力のモーメントを $\boldsymbol{N}$ とすると運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N} \tag{13}$$

が成り立つ．静止座標系では $\boldsymbol{L}=(L_x, L_y, L_z)$ であり

$$\frac{dL_x}{dt}=N_x, \qquad \frac{dL_y}{dt}=N_y, \qquad \frac{dL_z}{dt}=N_z \tag{14}$$

下へ向く重力外力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}=-mg\boldsymbol{k} \tag{15}$$

である．支点を原点に取ると，支点のまわりの重力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は

$$\boldsymbol{N}=-mg\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{k} \tag{16}$$

であるから，$\boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{k}$ に垂直で z 成分をもたない．したがって (13) により $dL_z/dt=0$，あるいは

$$L_z=\text{一定} \tag{17}$$

である．ここで角運動量 $\boldsymbol{L}$ の ξ, η, ζ 成分はそれぞれ

$$L_\xi=A\omega_1, \qquad L_\eta=B\omega_2, \qquad L_\zeta=C\omega_3 \tag{18}$$

であり

$$\boxed{\boldsymbol{L}=A\omega_1\boldsymbol{e}_\xi+B\omega_2\boldsymbol{e}_\eta+C\omega_3\boldsymbol{e}_\zeta} \tag{19}$$

したがって角運動量の z 成分が保存されることは

$$\boxed{L_z=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{k}=A\omega_1\gamma_1+B\omega_2\gamma_2+C\omega_3\gamma_3=\text{一定}} \tag{20}$$

と書ける．

【コメント】 1点を押さえられた剛体（コマ）の回転の自由度は3であり，エネルギーと鉛直方向の角運動量成分が保存されるから，さらにもう1つの積分（保存量）が見出されれば，運動は解ける．解ける場合として3種類が知られている．これは

1. 外力のない場合の剛体の自由回転．これはオイラーのコマと呼ばれている（第28講参照）．

2. 軸対称のコマ．これはふつうのコマであるが，ラグランジュ (Lagrange) のコマと呼ばれている（第27講参照）．

3. コワレフスカヤ (Kovalevskaya) が発見した特別な非対称なコマで，コワレフスカヤのコマという（これについては第29講と第30講で述べる）．

Tea Time

太陽系はコマの群れ

太陽のまわりを惑星がぐるぐる公転している．これは剛体ではないが大きなコマとみることができる．そして惑星は一定の方向を向いた軸のまわりに自転している．これもコマの運動である．

もっと大きくみれば銀河自身も特別大きなコマのようである．その回転運動を肉眼でみることはできないが，銀河には中心があってそのまわりを雲のように無数の恒星が回っている．その速度はドップラー効果で測ることができる．

ところで星が銀河の中心のまわりを回っているのはその星よりも内側にある他の星の引力のせいである．そう思われてきたが，星の速度の分布を調べると眼にみえる星の引力だけではなく，星の間には眼にみえない物質（?）があると考えないと説明がつかないという．これは一大事である．今まで物質はすべて電磁波に感じるもの，したがってX線などを含めた広い意味でみえるものと信じてきた．物質が電子や陽子などの電荷をもったものでできていれば当然そうである．だから本当にみえない物質があればそれは普通の物質ではない．暗黒物質というが，重力エネルギー自身かもしれない．しかし重力エネルギーは時空をゆがませるはずだから光を曲げる作用があるわけで，観測されるに違いないだろう．暗黒物質が透明人間であってもみえるはずであるが，この謎は20世紀末の物理学にとって（1世紀前のケルビンの言葉を借りれば)「地平線の黒い雲」であるような気がする．

ニュートンは12月生まれだというので，年末に大学でニュートン祭が祝われた．ニュートン祭の歌（石原純作）は私の記憶違いがなければ次のように歌われる．

「地軸傾く冬の夜を興ぜずや君．こがらし吹くを外にして開かれぬニュートン祭．理学の偉業讃うべく」

第 27 講

軸対称のコマ（ラグランジュのコマ）

—テーマ—

- ◆ 対称軸をもつコマ
- ◆ 運動の解
- ◆ Tea Time: 歳差運動の簡単な説明

対称軸をもつコマ

対称軸をζ軸とし，その上の1点Oが不動点であるコマ（ラグランジュ(Lagrange)のコマという）の運動を考えよう．ζ軸のまわりの慣性モーメントをCとし，ζ軸に垂直で不動点Oを通る2つの主慣性モーメントをAとすればオイラーの角を用いて運動エネルギーは（第26講（12）と（3）を参照し$A=B$とおく）

$$K=\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{C}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2 \qquad (1)$$

で与えられる．Oから重心までの距離をa，コマの質量をmとすると位置エネルギーは

$$U=mga\cos\theta \qquad (2)$$

である．ラグランジュ関数

$$L=K-U \qquad (3)$$

はφとψを含まないから，ラグランジュの運動方程式$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$, $\frac{d}{dt}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}-\frac{\partial L}{\partial \psi}=0$ から2つの運動の積分がただちに与えられる．これらは

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=A\dot{\varphi}\sin^2\theta+C(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\cos\theta=\text{一定}\ (M_z) \tag{4}$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}=C(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=\text{一定}\ (M_\zeta) \tag{5}$$

（4）は前講（20）と同じである（この講では角運動量を L でなく M と書く）．さらにエネルギー積分

$$E=\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{C}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2+mga\cos\theta=\text{一定} \tag{6}$$

これで3つの積分が求まった．この場合の自由度は3であるから，原理的に問題は解けることになる．

運動の解

（4）と（5）から $\dot{\psi}$ を消去すると

$$\dot{\varphi}=\frac{M_z-M_\zeta\cos\theta}{A\sin^2\theta} \tag{7}$$

（5）により（6）は

$$\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+mga\cos\theta=E-\frac{1}{2C}M_\zeta^2=\text{一定}\ (c) \tag{8}$$

と書けるから，これに（7）を代入すれば $\dot{\theta}$ に対する式

$$A^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta+(M_z-M_\zeta\cos\theta)^2+2Amga\cos\theta\sin^2\theta=2Ac\sin^2\theta \tag{9}$$

を得る．ここで

$$\cos\theta=u \tag{10}$$

とおけば

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=1-u^2\\ -\dot{\theta}\sin\theta&=\dot{u}\end{aligned} \tag{11}$$

したがって（9）は

$$A^2\dot{u}^2=-(M_z-M_\zeta u)^2+2A(c-mgau)(1-u^2)\equiv f(u) \tag{12}$$

を得る．これを積分すれば

$$A\int^{u}\frac{du}{\sqrt{f(u)}}=t-t_0 \tag{13}$$

となる．

$f(u)$ は u の3次式であり3つの根 $u_1\leq u_2\leq u_3$ を用いて

$$f(u)=2Amgl(u-u_1)(u_2-u)(u_3-u) \tag{14}$$

と書ける．ここで

$$u=u_1+(u_2-u_1)\sin^2 x \tag{15}$$

とおけば (13) は

$$\sqrt{\frac{2A}{mgl(u_3-u_1)}}\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=t-t_0 \tag{16}$$

ただし

$$k^2=\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}<1 \tag{17}$$

を与える．ヤコビの楕円関数 sn を用いれば (16) は

$$\sin x=\mathrm{sn}\left\{\sqrt{\frac{mg(u_3-u_1)}{2A}}(t-t_0)\right\} \tag{18}$$

となる．sn は周期関数である．(15) により

$$u=u_1+(u_2-u_1)\,\mathrm{sn}^2\left\{\sqrt{\frac{mg(u_3-u_1)}{2A}}(t-t_0)\right\} \tag{19}$$

を与える．これが $\cos\theta=u$ に対する運動の解である．θ が小さな時間的変化をするとき，その運動は章動と呼ばれる．

具体的には定数 u_1, u_2, u_3 は初期条件によって決まる．

【φ の変化】　φ と u の関係は

$$\frac{d\varphi}{du}=\frac{d\varphi/dt}{du/dt}=\frac{M_z-M_\zeta u}{(1-u^2)\sqrt{f(u)}} \tag{20}$$

と書けるので，これを積分すれば φ の時間変化は

$$\varphi-\varphi_0=\int\frac{(M_z-M_\zeta u)\,du}{(1-u^2)\sqrt{f(u)}} \tag{21}$$

で与えられる．この式の右辺は第3種楕円関数と呼ばれるものである．

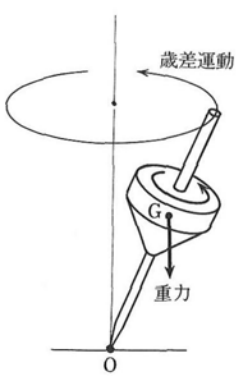


図 56

【歳差運動】　θ（あるいは u）が一定の場合の運動はいわゆる歳差運動（図56）である．対称軸（ζ 軸）のまわりの角速度を $\omega=\omega_\zeta$ とし，歳差運動の角速度を Ω とすると，Ω は

$$\Omega=\frac{C\omega}{2A\cos\theta}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4mgaA\cos\theta}{C^2\omega^2}}\right) \tag{22}$$

で与えられる．ω が十分大きいとして上式の平方根を展開すれば

$$\boxed{\begin{aligned}&\Omega\cong\frac{mga}{C\omega} &&\text{（ゆっくりした歳差運動）}\\ &\Omega\cong\frac{C\omega}{A\cos\theta} &&\text{（速い歳差運動）}\end{aligned}} \tag{23}$$

が得られる．速い歳差運動は重力に無関係（重力のないときの運動と同じ）であるが，これは実際には急速に減衰するので，ゆっくりした歳差運動がきわだってみられるのがふつうである．

【証明】　θ＝一定，すなわち u＝一定のときは (19) により $u_1=u_2$ である．u_1, u_2, u_3 は $f(u)$ の根であり，u_1 が2重根であるという条件は $u_1=u_2$ に対し

$$\begin{aligned}f(u)&=-(M_z-M_\zeta u)^2+2A(c-mgau)(1-u^2)=0\\ f'(u)&=2M_\zeta(M_z-M_\zeta u)-2Amgl(1-u^2)-4Au(c-mgau)=0\end{aligned} \tag{24}$$

と書ける．この第1式から $u_1^2\neq1(\theta\neq0,\pi)$ として

$$c-mgau_1=\frac{(M_z-M_\zeta u_1)^2}{2A(1-u_1^2)} \tag{25}$$

他方で（7）により

$$\Omega=\dot\varphi=\frac{M_z-M_\zeta u_1}{A(1-u_1^2)}=\text{一定} \tag{26}$$

であるからこれを $f'(u_1)=0$ に代入すると

$$M_\zeta\Omega-mgl-A\Omega^2u_1=0 \tag{27}$$

を得る．ここで

$$M_\zeta=C\omega \tag{28}$$

であり，(27) は

$$A\cos\theta\cdot\Omega^2-C\omega\Omega+mga=0 \tag{29}$$

と書ける．この2次方程式を Ω について解けば (22) が得られる．∎

Tea Time

歳差運動の簡単な説明

コマが速く回っているときのゆっくりした歳差運動は近似的に次のように考えることができる．

速く回っているとき角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$はほとんどコマの軸の方向を向いている（図57）．そしてコマにはたらく重力$\boldsymbol{F}=-Mg\boldsymbol{k}$（$\boldsymbol{k}$は鉛直上方を向いた単位ベクトル）の支点Oに対するモーメント$\boldsymbol{N}$は$\boldsymbol{L}$と$\boldsymbol{F}$に垂直なベクトルで，ベクトル$\boldsymbol{N}$の矢印の先端はdt時間に

$$d\boldsymbol{L}=\boldsymbol{N}\,dt$$

だけ動く．θを軸の傾き，歳差運動の半径をrとすると

$$r=L\sin\theta \qquad (L=|\boldsymbol{L}|)$$

であり

$$|d\boldsymbol{L}|=r\Omega\,dt=\Omega L\sin\theta\,dt$$

したがって

$$\Omega=\frac{N}{L\sin\theta} \qquad (N=|\boldsymbol{N}|)$$

である．一方で支点Oから重心までの距離をaとすると重力のための力のモーメントの大きさは

$$N=mga\sin\theta$$

である．したがって歳差運動の角速度は

$$\Omega=\frac{mga}{L}$$

さらに軸のまわりの慣性モーメントをC，コマの角速度をωとすれば$L=C\omega$であるから

$$\Omega=\frac{mga}{C\omega}$$

となる．これが（23）の第1式（ゆっくりした歳差運動）である．

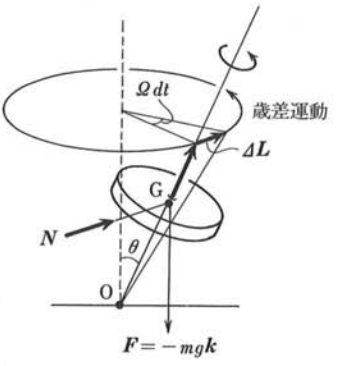


図57

第28講

剛体の自由な回転（オイラーのコマ）

—テーマ—

- ◆ オイラーの運動方程式
- ◆ テニスラケットの定理
- ◆ Tea Time: ネコの曲芸

自由回転

無重力状態で空間に投げられた物体は重心のまわりに自由回転をする．また重心で支えられた剛体も自由回転をする．このような場合の剛体の運動をオイラーのコマという．

静止座標系からみると回転する剛体にはたらく外力のモーメントを$\boldsymbol{N}$とするとき運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N} \qquad (1)$$

で与えられる．したがって外力のモーメントが0の自由回転では

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}=0 \qquad (2)$$

となり，角運動量$\boldsymbol{L}$は一定である：

$$\boldsymbol{L}=\text{一定} \qquad (3)$$

このように自由回転をする剛体の角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$は一定，すなわち静止座

標系からみて，角運動量ベクトルの方向と大きさが不変である．これが自由回転をする剛体の運動のもっとも基本的な性質である．成分で書けば

$$L_x=\text{一定}, \qquad L_y=\text{一定}, \qquad L_z=\text{一定} \tag{4}$$

である．

L_x, L_y, L_z は3つの保存量である．角運動量の大きさ L の2乗である

$$L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2 \tag{5}$$

も保存量であるが，独立な積分ではない．また L_x, L_y, L_z が一定ということは L_ξ, L_η, L_ζ あるいは $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が一定であることを意味しない．そこで運動を剛体に固定した座標系で表そう．

O-$\xi\eta\zeta$ を慣性主軸に選べば

$$L_\xi=A\omega_1, \qquad L_\eta=B\omega_2, \qquad L_\zeta=C\omega_3 \tag{6}$$

であり，第26講で知ったように，オイラーの角 (θ, φ, ψ) で表すと角速度の成分は

$$\begin{aligned}\omega_1&=\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi\\ \omega_2&=\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi\\ \omega_3&=\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\end{aligned} \tag{7}$$

である．

【回転のエネルギー】 剛体が剛体に固定した点Oのまわりに自由に回転できるとする．Oのまわりの剛体の慣性主軸を ξ, η, ζ 軸に選び，これらの主軸のまわりの慣性モーメントを A, B, C とすると，回転の運動エネルギーは

$$\boxed{K=\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2)} \tag{8}$$

で与えられる．この右辺に（7）を代入すれば運動エネルギーは

$$\boxed{\begin{aligned}K=&\frac{1}{2}A(\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi)^2+\frac{1}{2}B(\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)^2\\ &+\frac{1}{2}C(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2\end{aligned}} \tag{9}$$

となる．

外力のないときのオイラーの方程式

重力などの外力がはたらかないまったく自由な回転を考えよう．ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial K}{\partial \theta}\qquad \text{など} \tag{10}$$

である．これらを用いて

$$\boxed{\begin{aligned} A\dot{\omega}_1&=(B-C)\,\omega_2\omega_3\\ B\dot{\omega}_2&=(C-A)\,\omega_3\omega_1\\ C\dot{\omega}_3&=(A-B)\,\omega_1\omega_2\end{aligned}} \tag{11}$$

を導くことができる．(11) は外力がない場合のオイラーの運動方程式である．

【証明】（9）を $\dot{\theta},\dot{\phi},\dot{\psi}$ で微分すれば

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}=A\omega_1\sin\phi+B\omega_2\cos\phi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}}=-A\omega_1\sin\theta\cos\phi+B\omega_2\sin\theta\sin\phi+C\omega_3\cos\theta \tag{12}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}}=C\omega_3$$

これらを t で微分し，それぞれ $\sin\theta\sin\phi$，$-\cos\phi$，$\cos\theta\cos\phi$ をかけて加えれば

$$\begin{aligned}&\sin\theta\sin\phi\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}-\cos\phi\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}}+\cos\theta\cos\phi\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}}\\ &=\sin\theta\sin\phi(A\dot{\omega}_1\sin\phi+A\omega_1\dot{\phi}\cos\phi+B\dot{\omega}_2\cos\phi-B\omega_2\dot{\phi}\sin\phi)\\ &\quad-\cos\phi(-A\dot{\omega}_1\sin\theta\cos\phi-A\omega_1\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi+A\omega_1\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\\ &\quad+B\dot{\omega}_2\sin\theta\sin\phi+B\omega_2\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi+B\omega_2\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\\ &\quad+C\dot{\omega}_3\cos\theta-C\omega_3\dot{\theta}\sin\theta)+C\dot{\omega}_3\cos\theta\cos\phi\\ &=A\dot{\omega}_1\sin\theta+A\omega_1\dot{\theta}\cos\theta\cos^2\phi+B\omega_2\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi\cos\phi\\ &\quad-B\omega_2\dot{\phi}\sin\theta+C\omega_3\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi\end{aligned} \tag{13}$$

他方で

$$\frac{\partial K}{\partial \theta}=-A\omega_1\dot{\varphi}\cos\theta\cos\psi+B\omega_2\dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi+C\omega_3\dot{\varphi}\sin\theta$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \psi}=A\omega_1(\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)+B\omega_2(-\dot{\theta}\sin\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)$$

これらにそれぞれ $\sin\theta\sin\psi$, $-\cos\psi$, $\cos\theta\cos\psi$ をかけて加えれば

$$\begin{aligned}
&\sin\theta\sin\psi\frac{\partial K}{\partial\theta}-\cos\psi\frac{\partial K}{\partial\varphi}+\cos\theta\cos\psi\frac{\partial K}{\partial\psi}\\
&=-A\omega_1\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi+B\omega_2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi\\
&\quad+C\omega_3\dot{\varphi}\sin^2\theta\sin\psi\\
&\quad+A\omega_1\dot{\theta}\cos\theta\cos^2\psi+A\omega_1\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi\\
&\quad-B\omega_2\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi\cos\psi+B\omega_2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi\\
&=A\omega_1\dot{\theta}\cos\theta\cos^2\psi-B\omega_2\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi\cos\psi\\
&\quad+B\omega_2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta+C\omega_3\dot{\varphi}\sin^2\theta\sin\psi
\end{aligned}\tag{15}$$

(10) により (13) と (15) は等しい．この等式でいくつかの項が打ち消し合い，残るのは

$$A\dot{\omega}_1\sin\theta=B\omega_2(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\sin\theta-C\omega_3(\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\sin\theta \tag{16}$$

となる．ここで右辺に（7）を代入すれば，証明しようとする式 (11) の第1式を得る．第2，3式も同様である． ∎

運動の解

外力がない場合の自由回転の場合，オイラーの運動方程式は (11) で与えられるが，これはヤコビの楕円関数（第25講 Tea Time 参照）を用いて解くことができる．

【$A<B<C$ の場合】 オイラーの方程式 (11) の解は

$$\omega_1=\alpha\,\mathrm{cn}\,\lambda t,\qquad \omega_2=\beta\,\mathrm{sn}\,\lambda t,\qquad \omega_3=\gamma\,\mathrm{dn}\,\lambda t \tag{17}$$

の形（$\alpha,\beta,\gamma,\lambda$ は定数）に表せることが示される．しかしこれはわかりやすい解とはいえないから，もっと簡単な場合を調べよう．

【$A=B<C$ の場合】 これは z 方向（C 軸方向）につぶれた軸対称コマである．地球は極方向の半径が赤道半径よりも少し小さいのでこの場合に当たる．オイラ

一の方程式は

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1+\frac{C-A}{A}\omega_2\omega_3&=0\\ \dot{\omega}_2-\frac{C-A}{A}\omega_1\omega_3&=0\\ \dot{\omega}_3&=0\end{aligned}\qquad(18)$$

となるので，ω_3＝一定であり，解は

$$\begin{aligned}\omega_1&=a\cos(\Omega t+\alpha)\\ \omega_2&=a\sin(\Omega t+\alpha)\\ \omega_3&=\text{一定}\\ \Omega&=\frac{C-A}{A}\omega_3\end{aligned}\qquad(19)$$

で与えられる．

角運動量 $\boldsymbol{L}$ は静止座標系 (O-xyz) で一定であるが，剛体に固定した座標系 (O-$\xi\eta\zeta$) では成分

$$L_\xi=A\omega_1,\qquad L_\eta=B\omega_2,\qquad L_\zeta=C\omega_3\qquad(20)$$

をもつ．L_ξ と L_η は (19)，(20) によって時間的に変化するが，ベクトル (L_ξ, L_η, L_ζ) は静止系でみている $\boldsymbol{L}$ と一致しているのである．すなわち

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=L_\xi\boldsymbol{e}_\xi+L_\eta\boldsymbol{e}_\eta+L_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta\\ &=L_x\boldsymbol{i}+L_y\boldsymbol{j}+L_z\boldsymbol{k}\end{aligned}\qquad(21)$$

このため剛体に固定した座標系からみるとき，全体としての角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は対称軸のまわりに角運動量 Ω の一様な歳差運動を行うことになる (図58)．

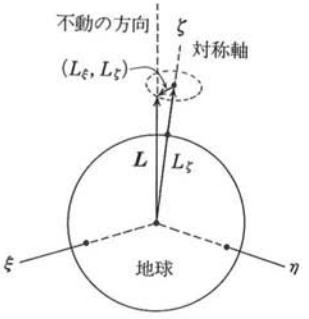


図 58

地球の場合，周期 $2\pi/\Omega$ は約10カ月である．この運動は地球が剛体でないために減衰するはずであるが，地球内の地震などによって励起される．そのため実際の運動は複雑である．

【$A\ll B, A+B=C$ の場合】 テニスラケットの軸を ξ 軸，重心を通ってラケットの面に垂直に ζ 軸をとると $A\ll B<C$ の条件が満たされる．ラケットのように

平たいときは$C=A+B$となる．このときオイラーの方程式は

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1+\omega_2\omega_3&=0\\ \dot{\omega}_2-\omega_1\omega_3&=0\\ \dot{\omega}_3+\omega_1\omega_2&=0\end{aligned}\qquad(22)$$

で近似できる．

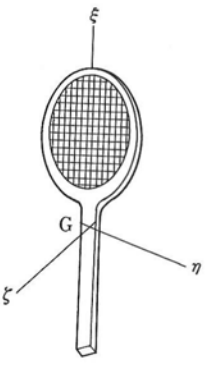


図 59

1. 初めの回転が軸ξのまわりのものであれば (22) で積$\omega_2\omega_3$は高次の項なので無視できて

$$\omega_1=\text{一定},\qquad \omega_2=a\sin(\omega_1 t+\alpha),$$
$$\omega_3=a\cos(\omega_1 t+\alpha)\qquad(23)$$

となる．これは安定な運動である．

2. 初めの回転が軸ζのまわりのものであれば，積$\omega_1\omega_2$は高次の項なので無視できて

$$\omega_3=\text{一定},\qquad \omega_1=a\cos(\omega_3 t+\alpha),\qquad \omega_2=a\sin(\omega_3 t+\alpha)\qquad(24)$$

この場合も安定な運動である．

3. 初めの回転が軸ηのまわりのものである場合は状況は異なってくる．この場合，初めに積$\omega_1\omega_3$を無視し

$$\omega_2=\omega_2(0)=\text{一定}\qquad(25)$$

とおいてみると，(22) の解として

$$\begin{aligned}\omega_1(t)&=ae^{-\omega_2 t}+be^{\omega_2 t}\\ \omega_2(t)&=ae^{-\omega_2 t}-be^{\omega_2 t}\end{aligned}\qquad(26)$$

となる．このため時間がたつとω_1,ω_2の運動は急速に増大し，ラケットはひっくり返ることになる．

このように慣性モーメントA,B,Cが最大値Cまたは最小値Cをとるような慣性主軸のまわりの回転は安定であるが，中間の慣性モーメントBのまわりの回転は不安定である．これをテニスラケットの定理と呼ぶことがある．

自由回転をわかりやすくする観点の1つとして，運動が角運動量が一定であることを表す球面

$$L_\xi^2+L_\eta^2+L_\zeta^2=L^2(\text{一定}) \tag{27}$$

とエネルギーの保存を表す曲面の交線に沿って行われることに着目する．エネルギーは $E=\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2)$ であるが，これを角運動量 $L_\xi=A\omega_1$, $L_\eta=B\omega_2$, $L_\zeta=C\omega_3$ を用いて書き直すとエネルギー面は

$$\frac{L_\xi^2}{2EA}+\frac{L_\eta^2}{2EB}+\frac{L_\zeta^2}{2EC}=1 \tag{28}$$

となる．これは楕円である．

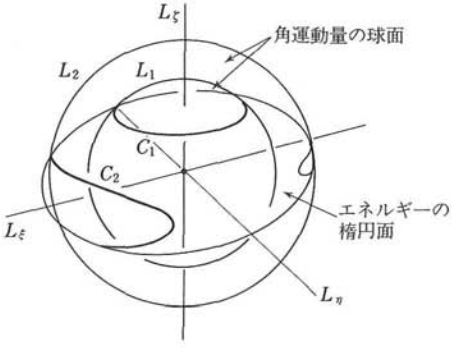


図 60

図 60 のようにエネルギー一定を表す楕円 (28) を描く．楕円体の半軸は $\sqrt{2EA}$, $\sqrt{2EB}$, $\sqrt{2EC}$ で，エネルギー E を決めれば定まるわけである．主慣性モーメント A,B,C が異なるとき，角運動量の大きさを与えても角運動量の向きによってエネルギーは異なる．言い換えればエネルギーを与えても角運動量の大きさ L は異なりうるのである．そこで，角運動量の大きさ L_1 を与えると球面 (27) が定まり，図のように交線 C_1 が決まる．角運動量の大きさが大きい値 L_2 を取るときは交線は C_2 のようになる．運動の軌道が C_1 になるか C_2 になるかは初期条件によって定まる．

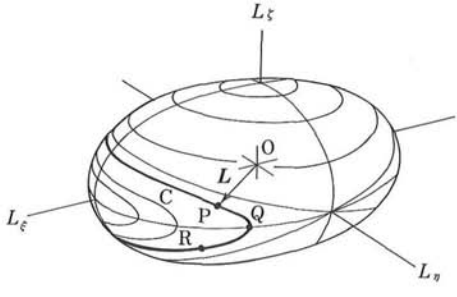


図 61

ある初期条件により，運動が図 61 の曲線 C をたどるとしよう．C 上の P へ楕円の中心から引いた矢印は角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ である．自由回転では角運動量ベクトルは空間に対して不変に保たれるから，剛体に固定した座標系に対する角運動量の成分 L_ξ, L_η, L_ζ で表した運

動が P→Q→R と移るとき，静止座標系でみると $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{L}$ は不変であって，剛体とこれに固定した座標系のほうが回転する．したがって P→Q→R のように急激に L_ξ, L_η, L_ζ が変化するときは，自由に投げられた剛体はときどき空間で急激に姿勢を変えるわけである．

Tea Time

ネコの曲芸

運動量と角運動量とは言葉は似ているが，直進運動と回転運動とは大きな違いがある．自由な直進運動では運動量は保存され，これは直進の速度が一定であることも意味する．これに対し自由な回転運動では角運動量は保存されるが，これは回転の速度が一定であることを意味しない．また回転運動のときにはその物体の形が変わるとそれにつれて回転の速度がそれに応じて変わる．

これをうまく利用しているのは運動競技である．鉄棒のウルトラCなどでは身体の形を変えることにより空中で自由自在に回転を行う．水泳の高飛び込みもそうである．

ネコを逆さにして放すと，ネコは空中で身体をうまく回転して正立の姿勢で着地することができる．このようなネコの曲芸を撮った写真をいくつか見比べると，ネコにもいろいろな流儀があるらしい（尻尾のあるなしにもよるだろう）．

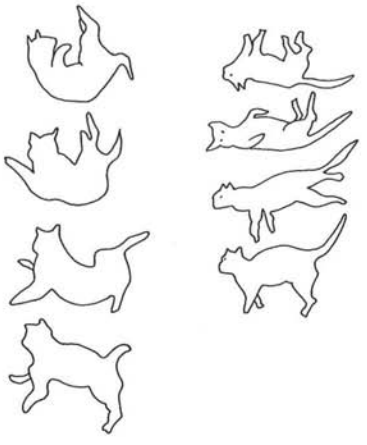


図 62

図 62 の a の流儀ではまず前半身，次に後半身をやや強引に逆向きに回転している．図 b ではまず前脚を身体につけて前半身の慣性モーメントを小さくしてこれを回転し，次いで後半身の慣性モーメントを小さくしてこれを回転している．

回転しているコマを放り上げて自由落下させれば，重心のまわりの運動はオイ

ラーのコマ，すなわち自由な回転を示すわけである．コマと同時にビデオカメラを落下させて撮影すれば自由回転の様子を記録することもできるであろう．しかしこれはそう簡単に実現できない．

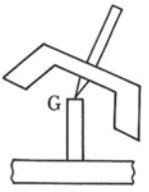


図 63

電磁気学で有名なマクスウェルはいろいろな実験装置を工夫するのが好きであった．そうした装置の中に，慣性モーメントや支点をいろいろと変えられるコマもあった．もしも厳密に重心で支えることができれば重力の影響を除いた自由回転がみられるわけである．図 63 のようなコマをつくれば重心のきわめて近くでコマを支えることができ，自由回転に近い回転がみられる．このときコマの軸は一定の方向を長い時間向いたままでいる．

第 29 講

非対称な剛体の運動

—テーマ—

- ◆ 一般のオイラーの運動方程式
- ◆ コワレフスカヤの積分
- ◆ Tea Time: コワレフスカヤ

外力があるときのオイラーの方程式

剛体に外力がはたらく場合を考え，剛体に固定した座標系 O-$\xi\eta\zeta$ の軸に関する外力のモーメントの成分を N_ξ, N_η, N_ζ とするとき，オイラーの方程式は

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1-(B-C)\omega_2\omega_3&=N_\xi \\ B\dot{\omega}_2-(C-A)\omega_3\omega_1&=N_\eta \\ C\dot{\omega}_3-(A-B)\omega_1\omega_2&=N_\zeta \end{aligned} \qquad (1)$$

となる．

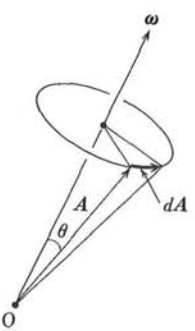


図 64

【証明】 動く座標系 O-$\xi\eta\zeta$ の角速度を $\boldsymbol{\omega}$ とすると，この座標系に対して不動のベクトル $\boldsymbol{A}$ の矢印の先端は静止座標系 O-xyz に対し（図 64 参照）

$$\frac{|d\boldsymbol{A}|}{dt}=\frac{|\boldsymbol{A}|\omega\, dt\sin\theta}{dt}$$

$$=|\boldsymbol{A}|\omega\sin\theta=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}| \tag{2}$$

の速さをもつ．その向きまで考慮すれば

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} \tag{3}$$

であることがわかる．動く座標系 O-$\xi\eta\zeta$ に対してベクトル $\boldsymbol{A}$ が $d'\boldsymbol{A}/dt$ の変化速度をもてば，静止座標系 O-xyz に対する変化率は

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}+\frac{d'\boldsymbol{A}}{dt}} \tag{4}$$

となる．これは任意のベクトルに対して成り立つ式である．

（4）を角運動量 $\boldsymbol{L}$ に対して用いると運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N} \tag{5}$$

は

$$\frac{d'\boldsymbol{L}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}=\boldsymbol{N} \tag{6}$$

となる．O-$\xi\eta\zeta$ 系で $\boldsymbol{L}$ の成分は

$$\boldsymbol{L}=(A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3) \tag{7}$$

であるから（6）を O-$\xi\eta\zeta$ 系の成分で書くと

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A\omega_1)+\omega_2C\omega_3-\omega_3B\omega_2=N_\xi\\
&\frac{d}{dt}(B\omega_2)+\omega_3A\omega_1-\omega_1C\omega_3=N_\eta\\
&\frac{d}{dt}(C\omega_3)+\omega_1B\omega_2-\omega_2A\omega_1=N_\zeta
\end{aligned} \tag{8}$$

となる．これはオイラーの方程式（1）にほかならない．■

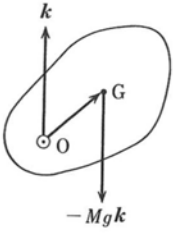


図 65

重力による力のモーメント

原点 O から剛体の慣性主軸に沿って座標軸（剛体とともに動く）ξ,η,ζ 軸を取り，剛体の重心 G の座標を

$$\boxed{\boldsymbol{r}_G=\xi_0\boldsymbol{e}_\xi+\eta_0\boldsymbol{e}_\eta+\zeta_0\boldsymbol{e}_\zeta} \tag{9}$$

とする（図 65）．ここで $(\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta)$ は (ξ, η, ζ) 軸方向の単位ベクトルである．

外力 $\boldsymbol{F}$ は重力 Mg だけであるとし，鉛直上方を向いた単位ベクトルを

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{k}&=\gamma_1\boldsymbol{e}_\xi+\gamma_2\boldsymbol{e}_\eta+\gamma_3\boldsymbol{e}_\zeta\\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2&=1\end{aligned}} \tag{10}$$

とする．剛体からみた鉛直方向の方向余弦が $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ である．

【外力のモーメント】 重力による外力のモーメント $\boldsymbol{N}$ の成分は

$$\boxed{\begin{aligned}N_\xi&=-Mg(\eta_0\gamma_3-\zeta_0\gamma_2)\\ N_\eta&=-Mg(\zeta_0\gamma_1-\xi_0\gamma_3)\\ N_\zeta&=-Mg(\xi_0\gamma_2-\eta_0\gamma_1)\end{aligned}} \tag{11}$$

で与えられる．ただし M は剛体の質量，g は重力加速度である．

【証明】 重力 $\boldsymbol{F}$ は鉛直下方に

$$\boldsymbol{F}=Mg(\gamma_1\boldsymbol{e}_\xi+\gamma_2\boldsymbol{e}_\eta+\gamma_3\boldsymbol{e}_\zeta) \tag{12}$$

であり，O のまわりの重力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{F}]=-Mg\{(\eta_0\gamma_3-\zeta_0\gamma_2)\boldsymbol{e}_\xi+(\zeta_0\gamma_1-\xi_0\gamma_3)\boldsymbol{e}_\eta+(\xi_0\gamma_2-\eta_0\gamma_1)\boldsymbol{e}_\zeta\} \tag{13}$$

■

【剛体の配向】 z 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ の O-$\xi\eta\zeta$ における成分 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ の変化速度は

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\gamma}_1&=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3\\ \dot{\gamma}_2&=\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1\\ \dot{\gamma}_3&=\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2\end{aligned}} \tag{14}$$

で与えられる．

【証明】 剛体に固定した座標系でみた変化を

$$\dot{\boldsymbol{k}}=\frac{d'\boldsymbol{k}}{dt}=(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3) \tag{15}$$

と書く．静止座標系では $d\boldsymbol{k}/dt=0$ であるから（(4) 参照）

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}+\dot{\boldsymbol{k}}=0 \tag{16}$$

これを剛体に固定した座標系の成分を用いて書けば，(14) を得る．

【運動方程式】 まとめて書くと

$$\begin{aligned}
A\dot{\omega}_1&=(B-C)\,\omega_2\omega_3-Mg(\eta_0\gamma_3-\zeta_0\gamma_2)\\
B\dot{\omega}_2&=(C-A)\,\omega_3\omega_1-Mg(\zeta_0\gamma_1-\xi_0\gamma_3)\\
C\dot{\omega}_3&=(A-B)\,\omega_1\omega_2-Mg(\xi_0\gamma_2-\eta_0\gamma_1)\\
\dot{\gamma}_1&=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3\\
\dot{\gamma}_2&=\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1\\
\dot{\gamma}_3&=\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2
\end{aligned} \tag{17}$$

となる．

コワレフスカヤのコマ

剛体の回転はオイラーの角 (θ,φ,ψ) で与えられることからわかるように，その自由度は3である．したがって上述のエネルギーと鉛直軸のまわりの角運動量のほかに，これらと独立な積分（第3積分）が存在すれば，この剛体の運動は解けることになる．

コワレフスカヤ (Kowalevskaja) は運動方程式（7），(11)，(14) の微分方程式としての性質を吟味し，それまでに解けた多自由度の系と比べて，主慣性モーメント A,B,C などのパラメタの間にある特別な関係があれば解ける可能性があることを推論し，実際にこれを証明した (1889年)．コワレフスカヤが第3積分の存在を示した特別の場合は固定点Oのまわりの2つの主慣性モーメントが等しく，残る慣性モーメント C の2倍で，重心が A 軸と B 軸を含む平面上にある場合である．この条件は慣性モーメントの単位を適当にとれば

$$A=B=2,\qquad C=1 \tag{18}$$

となる．$A=B$ なので重心の位置は A 軸上に取り

$$\eta_0=\zeta_0=0 \tag{19}$$

とすることができる．このような剛体の回転をコワレフスカヤのコマという．

【コワレフスカヤの積分】 (18)，(19) の条件のもとに運動方程式は

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1&=\omega_2\omega_3\\ 2\dot{\omega}_2&=-\omega_1\omega_3+c_0\gamma_3\\ \dot{\omega}_3&=-c_0\gamma_2 \end{aligned} \tag{20}$$

ただし

$$c_0=Mg\xi_0 \tag{20'}$$

また

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1&=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3\\ \dot{\gamma}_2&=\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1\\ \dot{\gamma}_3&=\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2 \end{aligned} \tag{21}$$

であり，これは積分

$$\xi\bar{\xi}=k^2\text{(一定)} \tag{22}$$

をもつ（これをコワレフスカヤの積分という）．ただしここで $(i=\sqrt{-1})$

$$\xi=(\omega_1+i\omega_2)^2-c_0(\gamma_1+i\gamma_2) \tag{23}$$

であり，$\bar{\xi}$ は ξ の複素共役である．

【証明】 簡単にするため

$$\begin{aligned} \omega&=\omega_1+i\omega_2, & \bar{\omega}&=\omega_1-i\omega_2\\ \gamma&=\gamma_1+i\gamma_2, & \bar{\gamma}&=\gamma_1-i\gamma_2 \end{aligned} \tag{24}$$

などと書く．(20) から

$$2\dot{\omega}=-\Omega i, \qquad 2\dot{\bar{\omega}}=\bar{\Omega}i \tag{25}$$

ただし

$$\Omega=\omega_3\omega-c_0\gamma_3,\qquad \bar{\Omega}=\omega_3\bar{\omega}-c_0\gamma_3 \tag{26}$$

また

$$\dot{\gamma}=-i\omega_3\gamma+i\omega\gamma_3,\qquad \dot{\bar{\gamma}}=i\omega_3\bar{\gamma}-i\bar{\omega}\gamma_3 \tag{27}$$

が導かれる．これらを用いて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\omega_2-c_0\gamma)&=-i\omega_3(\omega^2-c_0\gamma)\\ \frac{d}{dt}(\bar{\omega}^2-c_0\bar{\gamma})&=i\omega_3(\bar{\omega}^2-c_0\gamma)\end{aligned} \tag{28}$$

を得る．したがって

$$\frac{d}{dt}\{(\omega^2-c_0\gamma)(\bar{\omega}^2-c_0\bar{\gamma})\}=0 \tag{29}$$

ここで

$$\xi=\omega^2-c_0\gamma,\qquad \bar{\xi}=\bar{\omega}^2-c_0\bar{\gamma} \tag{30}$$

であるから (29) は (22) と一致する．∎

ラグランジュの運動方程式から

コワレフスカヤの積分をオイラーの角を用いてラグランジュの方程式から導いてみよう．z 軸を鉛直上向きにとり，剛体に固定した回転座標系（主軸）を (ξ,η,ζ) とする．オイラーの角 (θ,φ,ψ) を用いれば ξ 軸上で支点 O から ξ_0 の距離にある重心 G の座標 z_G は

$$z_G=-\xi_0\sin\theta\cos\psi \tag{31}$$

である．したがって位置エネルギーは $U=-Mg\xi_0\sin\theta\cos\psi$ であり，$A=B=2C$ のときラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}=C\left\{\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\right\}+Mg\xi_0\sin\theta\cos\psi \tag{32}$$

ϕ は循環座標なので，$\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}=0$ が角運動量の積分

$$2\dot{\psi}\sin^2\theta+(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta=\text{定数}\ (-2l) \tag{33}$$

を与える．

エネルギー積分は

$$\dot{\theta}+\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2-\frac{Mg\xi_0}{C}\sin\theta\cos\psi=\text{定数} \tag{34}$$

である．

最後にラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \tag{35}$$

の第1式は

$$2\ddot{\theta}=(\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\theta+\frac{Mg\xi_0}{C}\cos\theta\cos\psi \tag{36}$$

となる．第2式は

$$2\frac{d}{dt}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)=-\frac{Mg\xi_0}{C}\sin\theta\sin\psi \tag{37}$$

を与えるが，これに $-\cos\theta$ をかけ (33) を t で微分した式を加えて整理すれば $\ddot{\psi}$ が消去できて

$$2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\sin\theta)=-(\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi})\dot{\theta}+\frac{Mg\xi_0}{C}\cos\theta\sin\psi \tag{38}$$

を得る．さらに (36) に i をかけて (38) に加えれば

$$2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\sin\theta+i\dot{\theta})=i(\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi})(\dot{\varphi}\sin\theta+i\dot{\theta})+i\frac{Mg\xi_0}{C}\cos\theta\cdot e^{-i\psi} \tag{39}$$

となる．ここで

$$Q=(\dot{\varphi}\sin\theta+i\dot{\theta})^2+\frac{Mg\xi_0}{C}\sin\theta\cdot e^{-i\psi} \tag{40}$$

とおけば (37) は

$$\frac{dQ}{dt}=i(\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi})Q \tag{41}$$

を与える．

Q の複素共役を $\bar{Q}$ とすると

$$\bar{Q}=(\dot{\varphi}\sin\theta-i\dot{\theta})^2+\frac{Mg\xi_0}{C}\sin\theta\cdot e^{i\psi} \tag{42}$$

に対して同様な式

$$\frac{d\bar{Q}}{dt}=-(\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi})\bar{Q} \tag{43}$$

を得る．したがって

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{\bar{Q}}\frac{d\bar{Q}}{dt}=0 \tag{44}$$

が成り立つので

$$Q\bar{Q}=\text{定数}\ (k^2) \tag{45}$$

となる．これがコワレフスカヤの積分 (22) と同じものであることは容易に示される．このとき ξ,η と $Q,\bar{Q}$ の関係は

$$Q=\xi e^{-2i\psi},\qquad \bar{Q}=\eta e^{2i\psi} \tag{46}$$

である．

Tea Time

コワレフスカヤ

ソフィア・ワシーレウナ・コワレフスカヤ (Sof'ja Vasil'evna Kovalevskaja, あるいは Sophie Kowalevski, 1850-1891) はロシアで生まれ，ドイツで学んで41歳でスウェーデンで亡くなった美しい天才女流数学者で，偏微分方程式の研究などで有名である．

彼女は子供のときに父の棄てた微積分の本をみつけてたいへん興味をもったという．家庭教師から数学を教えられてすばらしい才能を示すようになったが，当時のロシアでは女性が学問をするのはむずかしかった．外国へ出るには結婚するのが都合がよかったこともあって，出版業をしていたコワレフスキーという人と偽装結婚をし，1869年に出国，ハイデルベルグ大学で特別に許可されて数学と物理学の勉強を始めた．翌年ベルリンへ行き数学者ワイエルストラス教授と研究に従事した．1874年に学位を得，ペテルスブルクやモスクワにも住むようになった．1883年以後は数学者ミッターハーレフラー (Mittag-Leffler) がいるストックホルム大学へ移って教授となる．

剛体の回転の研究は1888年ごろから始めて1890年に大成している．この研究で1888年の暮にパリ科学アカデミーからボルダン (Bordin) 賞を与えられ，1889年にはスウェーデン科学アカデミーの賞を受けている．

1889年ごろからコワレフスカヤはロシアに帰ってロシアに数学を研究できる地盤を築きたいと努力したが成功しなかった．そのため不安定な気分になったらしい．1890年12月にフランスのニースで休暇を過ごしてから帰国したが，デン

マークの乗り換え駅で嵐に会うなどして1月23日にストックホルムへ着いたときはすっかり風邪を引いていた．それでも無理をして仕事などを重ねたのがたたって，1月29日に息を引きとった．

伝記にワロンツォーク著（三橋重男訳）『コワレフスカヤの生涯』（東京図書，1975年）がある．

なお第29講と第30講は主に次の原著を参考にした．Kowalevski, S.: *Acta Math.*, **12**, 177-232, (1889), Kolossoff, G.: *Math. Annalen*, **56**, 265-272 (1903).

第30講

コワレフスカヤのコマ

—テーマ—

- ◆ 3つの積分
- ◆ ハミルトン-ヤコビの方法による解
- ◆ Tea Time: 逆立ちコマ

運動の積分

コワレフスカヤのコマのエネルギーは

$$\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2)+c_0\gamma_1=E \qquad (1)$$

であるが，$A=B=2$，$C=1$としているのでこれは

$$\boxed{(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{1}{2}\omega_3^2+c_0\gamma_1=E} \qquad (2)$$

と書ける．また重力のための力のモーメントは水平方向にあるので鉛直方向の角運動量は保存されるので

$$L_z=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{k}=A\omega_1\gamma_1+B\omega_2\gamma_2+C\omega_3\gamma_3=\text{一定} \qquad (3)$$

とくに$A=B=2$，$C=1$であるためこれは

$$\boxed{2(\omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2)+\omega_3\gamma_3=-2l\ (\text{一定})} \qquad (4)$$

となる．さらにコワレフスカヤの積分

$$\boxed{\xi\bar{\xi}=k^2\ (\text{一定})} \tag{5}$$

が与えられている．ここで

$$\xi=\omega^2-c_0\gamma,\qquad \omega=\omega_1+i\omega_2,\qquad \gamma=\gamma_1+i\gamma_2 \tag{6}$$

前講と同じく，複数共役は上にバーを付けて表す．たとえば $\bar{\omega},\bar{\gamma}$ は ω,γ の複素共役である．この3つの積分により，運動は原理的に解けるわけである．

しかし，積分（2），（4），（5）は簡単にみえるにもかかわらず，これらを用いて運動を完全に解くことは決して容易ではない．コワレフスカヤはこれを実行したのであるが，ここではもう少し簡単な方法を取ることにする．そのためまず運動方程式を書き直しておく．

運動方程式の書き換え

新しい変数

$$x_0=\xi\frac{\bar{\Omega}^2}{(\bar{\omega}-\omega)^2},\qquad \bar{x}_0=\bar{\xi}\frac{\Omega^2}{(\bar{\omega}-\omega)^2} \tag{7}$$

ただし

$$\Omega=\omega_3\omega-c_0\gamma_3 \tag{7'}$$

を導入する．このとき

$$\boxed{-\frac{1}{2\rho^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\rho^2-kx+c_0^2}{\rho}=2E} \tag{8}$$

であることが示される．ただしここで

$$\begin{gathered}x=\frac{1}{k}(x_0+\bar{x}_0),\qquad y=\frac{1}{ik}(x_0-\bar{x}_0)\\ \rho^2=x^2+y^2=\frac{4}{k^2}x_0\bar{x}_0=\left\{\frac{2\Omega\bar{\Omega}}{(\bar{\omega}-\omega)^2}\right\}^2\end{gathered} \tag{9}$$

【証明】 この証明はたいへんめんどうなので簡略して要点を示すにとどめる．第29講（20），（21）の運動方程式は（$i=\sqrt{-1}$）

$$2\dot{\omega}=-\Omega i$$

$$2\dot{\omega}_3=-2c_0\gamma_2=(\bar{\xi}-\xi+\omega^2-\bar{\omega}^2)i$$
$$\dot{\gamma}=(\omega\gamma_3-\omega_3\gamma)i \tag{10}$$
$$\dot{\gamma}_3=\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2=-\frac{1}{2c_0}\{\bar{\omega}\xi-\omega\bar{\xi}+\omega\bar{\omega}(\bar{\omega}-\omega)\}$$

と書ける．これらを用いて

$$\dot{\xi}=-\omega_3\xi i$$
$$2\dot{\Omega}=\{(\xi-\omega^2)(\bar{\omega}-\omega)-\omega_3\Omega\}i \tag{11}$$
$$4\dot{\omega}_2=-(\Omega+\bar{\Omega})$$

が示される．そこで（7）の対数を取って微分すると

$$\frac{1}{i}\frac{\dot{x}_0}{x_0}=\frac{1}{\Omega}(\xi-\bar{\omega}^2)(\bar{\omega}-\omega)-\frac{\Omega+\bar{\Omega}}{2\omega_2}i \tag{12}$$

よって少し長い計算の結果

$$-\frac{\dot{x}_0\dot{\bar{x}}_0}{x_0\bar{x}_0}=\frac{(\xi-\omega^2)(\bar{\xi}-\bar{\omega}^2)(\bar{\omega}-\omega)^2}{\Omega\bar{\Omega}}-\left(\frac{\bar{\xi}-\bar{\omega}^2}{\bar{\Omega}}+\frac{\xi-\omega^2}{\Omega}\right)(\Omega+\bar{\Omega})-\frac{(\Omega+\bar{\Omega})^2}{(\bar{\omega}-\omega)^2}$$
$$=\frac{c_0^2(\bar{\omega}-\omega)^2}{\Omega\bar{\Omega}}-\frac{\xi\bar{\Omega}^2+\bar{\xi}\Omega^2}{\Omega\bar{\Omega}}+\frac{4\Omega\bar{\Omega}}{(\omega-\bar{\omega})^2}$$
$$+\{\omega\bar{\omega}-(\xi-\omega^2)-(\bar{\xi}-\bar{\omega}^2)+\omega_3^2\} \tag{13}$$

を得る．ここで（6），（7），（9）から導かれる関係式

$$\omega-\bar{\omega}=2i\omega_2$$
$$\frac{2\Omega\bar{\Omega}}{(\omega-\bar{\omega})^2}=-\rho$$
$$\frac{\xi\bar{\Omega}^2+\bar{\xi}\Omega^2}{\Omega\bar{\Omega}}=\frac{2(x_0+\bar{x})}{\rho}=\frac{2kx}{\rho} \tag{14}$$
$$\omega\bar{\omega}-(\xi-\omega^2)-(\bar{\xi}-\bar{\omega}^2)+\omega_3^2=2E$$

を用いれば

$$-\frac{\dot{x}_0\dot{\bar{x}}_0}{x_0\bar{x}_0}=-2\frac{\rho^2-kx+c_0^2}{\rho}+2E \tag{15}$$

を得る．さらに（9）から

$$\frac{\dot{x}_0\dot{\bar{x}}_0}{x_0\bar{x}_0}=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\rho^2} \tag{16}$$

なので

$$-\frac{1}{\rho^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=-2\frac{\rho^2-kx+c_0^2}{\rho}+2E \tag{17}$$

となる．

変数分離

（8）はほとんど2次元空間内の質点のエネルギーの形をしている．ただ左辺の運動のエネルギーに当たる第1項にマイナスが付いている（第2項は位置エネルギーと解釈できる）．そこで

$$\rho\, dt = i\, d\tau \qquad (i=\sqrt{-1}) \tag{18}$$

とおいて時間 t の代わりに新しい変数 τ を用いると

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right\}+\frac{\rho^2-kx+c_0{}^2}{\rho}=E \tag{19}$$

がエネルギーの式になる．さらに適当な変数変換によって（19）を積分できるように変数分離できれば問題は解ける．このために正準変換の方法の1つであるハミルトン-ヤコビの方程式（『一般力学30講』の第30講参照）による積分方法を考えよう．この方法は τ が虚数であっても用いることができる．

天下り式であるが，これは x, y の代わりに新しい変数 λ, μ を

$$x=\frac{1}{k}(\lambda\mu+k^2)$$
$$y^2=\frac{1}{k^2}(\lambda^2-k^2)(k^2-\mu^2) \tag{20}$$

によって導入することによって達せられる．このとき

$$\rho=\lambda+\mu \tag{21}$$

となることが確かめられ，(19) は

$$E=\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)\left\{\frac{(d\lambda/d\tau)^2}{\lambda^2-k^2}+\frac{(d\mu/d\tau)^2}{k^2-\mu^2}\right\}+\frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2+c_0{}^2-k^2) \tag{22}$$

となる．さらに λ と μ に正準共役な運動量 p_1 と p_2 を

$$p_1=\frac{\partial E}{\partial(d\lambda/d\tau)}, \qquad p_2=\frac{\partial E}{\partial(d\mu/d\tau)} \tag{23}$$

によって導入すれば（22）から

$$E=\frac{1}{2(\lambda^2-\mu^2)}\left[(\lambda^2-k^2)p_1^2+(k^2-\mu^2)p_2^2+2\{(\lambda^3-\mu^3)+(c_0^2-k^2)(\lambda-\mu)\}\right] \tag{24}$$

となる．

ここでハミルトン-ヤコビの積分方法により

$$p_1=\frac{\partial S}{\partial \lambda},\qquad p_2=\frac{\partial S}{\partial \mu} \tag{25}$$

とおく．すると (24) は書き直して

$$(\lambda^2-k^2)\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2+2\{\lambda^3-E\lambda^2+(c_0^2-k^2)\lambda\}$$

$$=(\mu^2-k^2)\left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)^2+2\{\mu^3-E\mu^2+(c_0^2-k^2)\mu\}=c \tag{26}$$

となる．これは λ だけの式と μ だけの式とに分離された形になっている．右辺の c は λ にも μ にもよらない定数である．

そこで (26) を積分すれば

$$S=\int^{\lambda}\frac{\sqrt{-2\{\lambda^3-E\lambda^2+(c_0^2-k^2)\lambda\}+c}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,d\lambda+\int^{\mu}\frac{\sqrt{-2\{\mu^3-E\mu^2+(c_0^2-k^2)\mu\}+c}}{\sqrt{\mu^2-k^2}}\,d\mu \tag{27}$$

となる．これは2つの定数 c とエネルギー定数 E を含む完全解であり，運動は $S=S(\lambda,\mu,c,E)$ によって次節のように決定される．

運動の決定

ハミルトン-ヤコビの理論によれば，運動は (28) の関数 $S(\lambda,\mu,c,E)$ を用い

$$\frac{\partial S}{\partial c}=\text{定数},\qquad \frac{\partial S}{\partial E}=\tau-\tau_0 \tag{28}$$

によって決定される．

$$\varphi(\lambda)=-\lambda^3+E\lambda^2-(c_0^2-k^2)\lambda+\frac{c}{2} \tag{29}$$

とおけば (28) は

$$\boxed{\begin{aligned}&\int^{\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda^2-k^2)}}+\int^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu^2-k^2)}}=\text{定数}\\&\int^{\lambda}\frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda^2-k^2)}}+\int^{\mu}\frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu^2-k^2)}}=\sqrt{2}(\tau-\tau_0)\end{aligned}}\tag{30}$$

となる（τ_0 は定数）．これによってコワレフスカヤのコマの運動が積分された．

運動を吟味することにより定数 c は鉛直方向の角運動の定数 l（式（4）参照）とエネルギー E およびコワレフスカヤの積分の定数 k^2（式（5）参照）との間に

$$c=2\{(1-k^2)E-2l^2\}\tag{31}$$

の関係があることが示される．

なお (30) を微分すると

$$\begin{aligned}&\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda^2-k^2)}}+\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu^2-k^2)}}=0\\&\frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda^2-k^2)}}+\frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu^2-k^2)}}=\sqrt{2}\,d\tau\end{aligned}\tag{32}$$

となる．この第1式に $-\mu^2$ をかけて第2式を加えると

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda^2-k^2)}}=\frac{\sqrt{2}\,d\tau}{\lambda^2-\mu^2}\tag{33}$$

を得る．同様に

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu^2-k^2)}}=\frac{\sqrt{2}\,d\tau}{\mu^2-\lambda^2}\tag{33'}$$

そこで (33) と (33′) を加えたり，(33) に λ を，(33′) に μ をかけて加えたりし，さらに (18)，(21) により

$$id\tau=(\lambda+\mu)\,dt\tag{34}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}&\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda^2-k^2)}}+\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu^2-k^2)}}=0\\&\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda^2-k^2)}}+\frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu^2-k^2)}}=-i\sqrt{2}\,dt\end{aligned}\tag{35}$$

を得る．コワレフスカヤは (35) を積分してその逆関数によりコマの運動が2変数のリーマン ϑ（テータ）関数で表されることを示した．

コワレフスカヤのコマの形

コワレフスカヤのコマは支点のまわりの主慣性モーメントが $A=B=2C$ の関係を満たし，重心が A 軸上にある回転体である．コワレフスカヤはこれがどのような形（質量分布）のものであればよいかを明らかにしている．

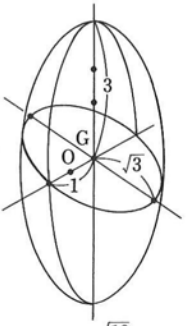


図 66

たとえば一様密度の楕円体でこれをつくるとすれば，その中心（重心）Gから測った3つの半軸（主軸 x,y,z 方向の半径）が $1:\sqrt{3}:3$ の楕円体となる．この楕円体の x 軸上で重心Gから $\sqrt{10}/5=0.63\cdots$ のところを支点Oとすればコワレフスカヤの条件 $A=B=2C$ が満たされる．

【証明】 一様な密度の楕円体の主軸（x,y,z 軸）方向の半軸を a,b,c とすると，中心Gのまわりの主慣性モーメント A_G,B_G,C_G は M を全質量として

$$A_G=\frac{M}{5}(b^2+c^2),\qquad B_G=\frac{M}{5}(a^2+c^2),\qquad C_G=\frac{M}{5}(a^2+b^2)\tag{36}$$

で与えられる．ここで

$$a:b:c=1:\sqrt{3}:3\tag{37}$$

とすれば

$$A_G:B_G:C_G=6:5:2\tag{38}$$

となる．

次に x 軸上でGから d だけ離れた点Oを支点として，支点のまわりの主慣性モーメントを A,B,C とすれば慣性モーメントのよく知られた関係により

$$A=A_G,\qquad B=B_G+Md^2,\qquad C=C_G+Md^2\tag{39}$$

となる．ここで

$$a:d=1:\frac{\sqrt{10}}{5}\tag{40}$$

とすれば

$$A:B:C=2:2:1\tag{41}$$

となり，コワレフスカヤのコマの条件が満たされる．

【コメント】 コワレフスカヤのコマの条件を満たすコマは楕円体の形状である必要はない．またコマの内部に支点があるようなコマも実現可能である．オイラーのコマ（第28講参照）の場合，内部にある重心を支えたコマがあったことを思い出してほしい．

Tea Time

逆立ちコマ

逆立ちコマは球の一部を切り棄てて，そこに軸を付けた形をしている．机上に置いたときは軸を上にして直立するが，軸を指でつまんで速い回転を与えるとたちまち逆転し，軸を下にして逆立ちする．

ありあわせのものを利用して逆立ちコマをつくるのはそれほどむずかしいこと

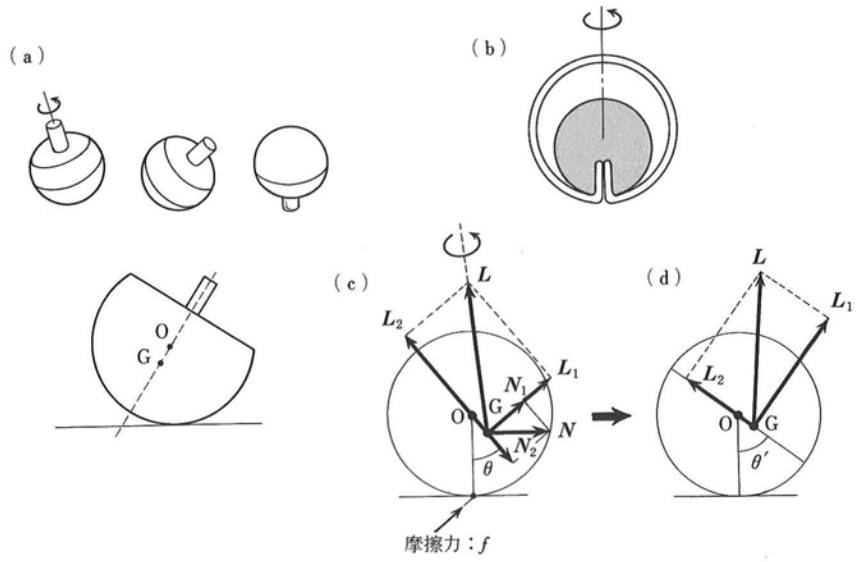


図 67
O：球面の中心，G：重心．

ではない．要は図67のように球面の中心より少し下（軸から遠く）に重心があるようにすることである．

粘土の小片を10円硬貨の一部に付け，指ではじいて回すと，粘土の付いたほうが上になって回る．碁石なども速く回転させると立ち上がる．要するに回転すると重心が上がって安定するのである．普通のコマでも歳差運動（首振り運動）をしていたのが，いわゆるねむりコマの状態になるときは重心が上がる．

逆立ちコマはちょっとわかりにくいが，円板に円形の枠を付けた平板状の逆立ちコマ（図b）について逆立ちするわけを説明しよう．図でOは外枠の中心，Gは重心である．はじいて回すと重心Gのまわりに回転する（図c）．机との接触点はOの直下で，そこに摩擦力fが（図では手前から向こうへ）はたらき，そのために重心には力のモーメント$\boldsymbol{N}$が作用する．$\boldsymbol{N}$はほとんど水平である．コマの角運動量$\boldsymbol{L}$はほとんど不変とみてよいが，これをコマの軸GOの方向の成分$\boldsymbol{L}_2$と円板に沿い$\boldsymbol{L}_2$に垂直な成分$\boldsymbol{L}_1$とに分ける．また摩擦力のモーメント$\boldsymbol{N}$も同じ方向の成分$\boldsymbol{N}_2$と$\boldsymbol{N}_1$に分ける．図からわかるように$\boldsymbol{N}_2$のために$\boldsymbol{L}_2$は減少し，$\boldsymbol{N}_1$のために$\boldsymbol{L}_1$は増加するので，cの次の瞬間にはdのようになる．このときOGが鉛直線となす角θは増加してθ'になる．このため重心は上がる．円板の回転により摩擦力の方向も絶えず変わるが，$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$と$\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2$の相対関係は本質的に変わらず，重心Gは上がり続けるのである．

索　引

ア　行

圧力（音波の）　41
アトラクタ　1
　ストレンジ――　23
アブロビッツ　124

位相空間　1, 17
1次元格子　65
一般座標　66
インダクタンス　70

ヴォルテラ　19
ウラム　49
運動方程式
　オイラーの――　192, 199
　ラグランジュの――　204
運動量（共役な）　66

エアリー　41
AKNS 方程式　124
SG 方程式 → サイン-ゴルドン方程式
NLS 方程式 → 非線形シュレーディンガー方程式
*N*ソリトン解　102
　KdV 方程式の――　62
　KP 方程式の――　150
エネルギー保存の法則　91
エノン　167
エノン-ハイレス系　167
MKdV 方程式 → 変形された KdV 方程式
エルゴード問題　49
LC 回路　70
エルミート共役　87

追い越し衝突　80
オイラーの運動方程式　192, 199
オイラーの角　180
オイラーのコマ　183
オプティカルソリトン　121
音波の圧力　41

カ　行

回転（剛体の）　179
カウプ　124
カオス　19, 21, 30, 167, 170
　決定論的――　30
化学反応　9
角速度　180
重ね合わせの原理　37
可積分変換　112
カソラチ行列式　164
カチカチボール　107
カッツ　64, 135
カッツ-メールベッケ系　135
ガードナー　50
カドムチェフ　149
カドムチェフ-ペトビアシュビリ方程式 → KP 方程式

規準振動　49
軌　道　1
逆散乱法　50, 57, 98
逆散乱問題　58
逆問題　64
キャパシタンス　70
球面振り子　174
共役な運動量　66
行列式解　47
行列式の展開　156
行列式表現　81
極限軌道　3
局在振動　69

銀　河　167
キンク　118

クノイダル波　34
熊手型分岐　31
暗いソリトン　119
クラメルの方法　62
グリーン　50
クルスカル　44, 50, 55
群速度　38

KdV ヒエラルキー　124
KdV 方程式　43. 57, 91, 112, 126, 141
　――に付随するシュレーディンガー方程式　53
　高階――　122
　2次元――　145, 149
　変形された――　112, 120, 126
KP 方程式　145
　――の*N*ソリトン解　150
決定論的カオス　30
ゲルファント-レビタンの方程式　58, 125
　格子に対する――　95
ゲルファント-レビタン-マルチェンコの方程式　58
減衰振動　5

高階 KdV 方程式　122
高階の発展方程式系　122
広義座標　66
格　子
　1次元――　65
　3粒子周期――　85, 86, 170
　指数――　74
　周期的な――　85
　線形――　68

双対—— 67
戸田—— 74,77,130,138,172
非線形—— 50,73,78
格子ソリトン 75
高次の発展方程式系 122
格子模型 65
向心衝突 81
剛体に固定した座標系 179
剛体の回転 179
コ　マ 182
オイラーの—— 183
コワレフスカヤの—— 184,202,208,214
逆立ち—— 215
軸対称の—— 185
ラグランジュの—— 183,185
固有振動 69
固有値 88
孤立波 41
孤立波解 43
コルテヴェーグ 41,43
コルテヴェーグ-ド・フリース方程式 → KdV 方程式
コール-ホップ変換 39,127
コワレフスカヤ 184,202,206
コワレフスカヤのコマ 184,202,208,214
コワレフスカヤの積分 203,209

サ　行

歳差運動 186,187,189
速い—— 188
ゆっくりした—— 188,189
サイン-ゴルドン方程式 117,126
逆立ちコマ 215
ザブスキー 44
差分化 28
散逸系 24
散乱問題 57
格子に対する—— 93
3粒子周期格子 85,86,170

シガー 124
弛緩振動 3
軸対称のコマ 185
自己集束 121
自己組織化 19
自己透過現象 118
指数格子 74
磁束伝播 118
質量保存の法則 91
自由回転 190
周期的な格子 85
周期的分岐 30
周期倍増 30
周期波解 43
主軸変換 170
シュレーディンガー方程式 53,59,127
KdV 方程式に付随する—— 53
非線形—— 119,126
状態空間 17
初期値敏感性 32
初期データ 57
ジョゼフソン接合素子 118
自励振動 4
人口爆発 12

スコット・ラッセル 41,83
ストレンジアトラクタ 23

正準運動方程式 67
正準変換 66
生態系 9,13,,19
関孝和 143
積分可能系 89,167
積分可能な発展方程式 116
積乱雲 27
セルオートマトン模型 157
線　形 37
線形格子 68
線形方程式 37
浅水波（ラグランジュの） 41

双線形形式 137
双対関係 67,71
双対格子 67
双対変換 74
相平面 1
相補性 72
束縛状態 53,96
——の波動関数 59
ソリトン 44,83
——の衝突 80
——の発見 44
暗い—— 118
格子—— 75
包絡線—— 118
ソリトン解 45

タ　行

第3積分 167,202
代表点 17
対　流 21
対流圏 27
楕円関数 78
ヤコビの—— 177,187,193
ダークソリトン 119
ダランベールの解 36

テニスラケットの定理 195
寺田寅彦 20
転　位 118
テント写像 32

戸田格子 74,77,130,138,172
2次元—— 159
ド・フリース 41,43

ナ　行

2次元 KdV 方程式 145,149
2次元戸田格子 159
二重性 72
2進変換 33
2ソリトン解 45
ニューウェル 124

熱伝導 77

ノーマルモード 49

ハ 行

バイこね変換 33
ハイレス 167
バーガーズ方程式 36
パスタ 49
パスツール 91
発 振 2
発振現象 6
発展方程式（積分可能な） 116
発展方程式系(高階〔高次〕の) 122
波動関数 60,97
　束縛状態の—— 59
波動方程式 36
　非線形—— 83
ハミルトン-ヤコビの方程式 211
速い歳差運動 188
反キンク 118
パン屋の変換 33

非線形回路 70
非線形格子 50,73,78
非線形シュレーディンガー方程式 119,126
非線形波動 44
非線形波動方程式 83
非線形方程式 10,38
非分散性 37
非平衡 19
ヒルベルト変換 120
広田の演算子 137
Hirota の方法 137
広田良吾 137

ファイゲンバウム定数 31
ファイゲンバウムの普遍法則 32
ファインマン 99
ファン・デル・ポール 2
ファン・デル・ポールの方程式 2
フェルミ 49
フェルミ-パスターウラムの再帰現象 50
ブシネ方程式 50,111
負抵抗 1
フラクタル 23
フラクタル次元 23
ブラントル数 22
ブリーザー解 118
ブリュッカーの関係式 154
不連続時間 34
分 岐 31
分散関係 38
分散性 27
分散性媒質 37

ベックルント 128
ベックルント変換 129
　——のダイヤグラム 134
　SG 方程式の—— 129
　逆散乱法と—— 132
　KdV 方程式の—— 133
　戸田格子の—— 130
ペトビアシュビリ 149
ベナールの渦 26
ベナールの対流 21
ベルヌーイシフト 33
変形された KdV 方程式 112, 120,126
ベンジャミン-小野方程式 120
変数分離 211

ポアンカレ写像 170
包絡線ソリトン 119
保存量 14,16,89,91

マ 行

マヤ図形 155

ミウラ 50

メールベッケ 135

ヤ 行

ヤコビの楕円関数 177,187,193
ゆっくりした歳差運動 188,189
ユニタリ等価 87

ラ 行

ラヴォアジエ 91
ラグランジュの運動方程式 204
ラグランジュのコマ 183,185
ラグランジュの浅水波 41
ラックス形式 51,54,86,122
ラプラス展開 156

リアプノフ数 26
リゥヴィルの定理 17,89
リゥヴィルの方程式 117
リエナールの特性曲線 5
リエナールの方程式 4
力学系 9
リミットサイクル 3

ルビンの壺 71

レイリー 21,41
レイリー数 22
レイリーの方程式 4
レイリー板 41
レイリー-ベナールの対流 21
レスラー系 25
連続体 91
連続体近似 91,109

ロジスティック 10
ロジスティック曲線 11
ロジスティック写像 29
ロジスティック方程式 10
ロトカ 19
ロトカ-ヴォルテラの方程式 13
ローレンツ 21
ローレンツ系 22
ローレンツの方程式 22
ロンスキアン解 48

ワ 行

和 算 143

著者

戸田盛和（とだ もりかず）

1917年　東京に生まれる
1940年　東京大学理学部物理学科卒業
現　在　東京教育大学名誉教授
　　ノルウェー王立科学アカデミー会員
　　理学博士

物理学30講シリーズ3
波動と非線形問題30講　　定価はカバーに表示

1995年3月10日　初版第1刷
2007年2月25日　第7刷

著者　戸田盛和
発行者　朝倉邦造
発行所　株式会社 朝倉書店
東京都新宿区新小川町6－29
郵便番号　162-8707
電話　03（3260）0141
FAX　03（3260）0180

〈検印省略〉

© 1995〈無断複写・転載を禁ず〉

新日本印刷・渡辺製本

ISBN 978-4-254-13633-3　C3342　　Printed in Japan

◆ 朝倉物理学大系〈全21巻〉 ◆

荒船次郎・江沢　洋・中村孔一・米沢富美子 編集

駿台予備学校 山本義隆・明大 中村孔一著
朝倉物理学大系 1
解　析　力　学　I
13671-5 C3342　　A 5 判 328頁 本体5600円

満を持して登場する本格的教科書。豊富な例題を通してリズミカルに説き明かす。本巻では数学的準備から正準変換までを収める。〔内容〕序章—数学的準備／ラグランジュ形式の力学／変分原理／ハミルトン形式の力学／正準変換

駿台予備学校 山本義隆・明大 中村孔一著
朝倉物理学大系 2
解　析　力　学　II
13672-2 C3342　　A 5 判 296頁 本体5600円

満を持して登場する本格的教科書。豊富な例題を通してリズミカルに説き明かす。本巻にはポアソン力学から相対論力学までを収める。〔内容〕ポアソン括弧／ハミルトン-ヤコビの理論／可積分系／摂動論／拘束系の正準力学／相対論的力学

前阪大 長島順清著
朝倉物理学大系 3
素粒子物理学の基礎 I
13673-9 C3342　　A 5 判 288頁 本体5400円

実験物理学者が懇切丁寧に書き下ろした本格的教科書。本書は基礎部分を詳述。とくに第7章は著者の面目が躍如。〔内容〕イントロダクション／粒子と場／ディラック方程式／場の量子化／量子電磁力学／対称性と保存則／加速器と測定器

前阪大 長島順清著
朝倉物理学大系 4
素粒子物理学の基礎 II
13674-6 C3342　　A 5 判 280頁 本体5300円

実験物理学者が懇切丁寧に書き下ろした本格的教科書。本巻はIを引き継ぎ，クオークとレプトンについて詳述。〔内容〕ハドロン・スペクトロスコピィ／クォークモデル／弱い相互作用／中性K中間子とCPの破れ／核子の内部構造／統一理論

前阪大 長島順清著
朝倉物理学大系 5
素粒子標準理論と実験的基礎
13675-3 C3342　　A 5 判 416頁 本体7200円

実験物理学者が懇切丁寧に書き下ろした本格的教科書。本巻は高エネルギー物理学の標準理論を扱う。〔内容〕ゲージ理論／中性カレント／QCD／Wボソン／Zボソン／ジェットの性質／高エネルギーハドロン反応

前阪大 長島順清著
朝倉物理学大系 6
高エネルギー物理学の発展
13676-0 C3342　　A 5 判 376頁 本体6800円

実験物理学者が懇切丁寧に書き下ろした本格的教科書。本巻は高エネルギー物理学最前線を扱う。〔内容〕小林-益川行列／ヒッグス／ニュートリノ／大統一と超対称性／アクシオン／モノポール／宇宙論

北大 新井朝雄・前学習院大 江沢　洋著
朝倉物理学大系 7
量子力学の数学的構造 I
13677-7 C3342　　A 5 判 328頁 本体5800円

量子力学のデリケートな部分に数学として光を当てた待望の解説書。本巻は数学的準備として，抽象ヒルベルト空間と線形演算子の理論の基礎を展開。〔内容〕ヒルベルト空間と線形演算子／スペクトル理論／付：測度と積分，フーリエ変換他

北大 新井朝雄・前学習院大 江沢　洋著
朝倉物理学大系 8
量子力学の数学的構造 II
13678-4 C3342　　A 5 判 320頁 本体5800円

本巻はIを引き継ぎ，量子力学の公理論的基礎を詳述。これは，基本的には，ヒルベルト空間に関わる諸々の数学的対象に物理的概念あるいは解釈を付与する手続きである。〔内容〕量子力学の一般原理／多粒子系／付：超関数論要項，等

東大 高田康民著
朝倉物理学大系 9
多　体　問　題
13679-1 C3342　　A 5 判 392頁 本体7200円

グリーン関数法に基づいた固体内多電子系の意欲的・体系的解説の書。〔内容〕序／第一原理からの物性理論の出発点／理論手法の基礎／電子ガス／フェルミ流体理論／不均一密度の電子ガス：多体効果とバンド効果の競合／参考文献と注釈

前広島大 西川恭治・首都大 森　弘之著
朝倉物理学大系10
統　計　物　理　学
13680-7 C3342　A 5 判 376頁 本体6800円

量子力学と統計力学の基礎を学んで，よりグレードアップした世界をめざす人がチャレンジするに好個な教科書・解説書。〔内容〕熱平衡の統計力学：準備編／熱平衡の統計力学：応用編／非平衡の統計力学／相転移の統計力学／乱れの統計力学

前東大 高柳和夫著
朝倉物理学大系11
原　子　分　子　物　理　学
13681-4 C3342　A 5 判 440頁 本体7800円

原子分子を包括的に叙述した初の成書。〔内容〕水素様原子／ヘリウム様原子／電磁場中の原子／一般の原子／光電離と放射再結合／二原子分子の電子状態／二原子分子の振動・回転／多原子分子／電磁場と分子の相互作用／原子間力，分子間力

北大 新井朝雄著
朝倉物理学大系12
量　子　現　象　の　数　理
13682-1 C3342　A 5 判 548頁 本体9000円

本大系第７，８巻の続編。〔内容〕物理量の共立性／正準交換関係の表現と物理／量子力学における対称性／物理量の自己共役性／物理量の摂動と固有値の安定性／物理量のスペクトル／散乱理論／虚数時間と汎関数積分の方法／超対称的量子力学

前筑波大 亀淵　迪・慶大 表　実著
朝倉物理学大系13
量　子　力　学　特　論
13683-8 C3342　A 5 判 276頁 本体5000円

物質の二重性(波動性と粒子性)を主題として，場の量子論から出発して粒子の量子論を導出する。〔内容〕場の一元論／場の方程式／場の相互作用／量子化／量子場の性質／波動関数と演算子／作用変数・角変数・位相／相対論的な場と粒子性

前京大 伊勢典夫・京産大 曽我見郁夫著
朝倉物理学大系16
高　分　子　物　理　学
―巨大イオン系の構造形成―
13686-9 C3342　A 5 判 400頁 本体7200円

イオン性高分子の新しい教科書。〔内容〕屈曲性イオン性高分子の希薄溶液／コロイド分散系／巨大イオンの有効相互作用／イオン性高分子およびコロイド希薄分散系の粘性／計算機シミュレーションによる相転移／粒子間力についての諸問題

前東大 村田好正著
朝倉物理学大系17
表　面　物　理　学
13687-6 C3342　A 5 判 320頁 本体6200円

量子力学やエレクトロニクス技術の発展と関連して進歩してきた表面の原子・電子の構造や各種現象の解明を物理としての面白さを意識して解説〔内容〕表面の構造／表面の電子構造／表面の振動現象／表面の相転移／表面の動的現象／他

前九大 高田健次郎・前新潟大 池田清美著
朝倉物理学大系18
原　子　核　構　造　論
13688-3 C3342　A 5 判 416頁 本体7200円

原子核構造の最も重要な３つの模型(殻模型，集団模型，クラスター模型)の考察から核構造の統一的理解をめざす。〔内容〕原子核構造論への導入／殻模型／核力から有効相互作用へ／集団運動／クラスター模型／付：回転体の理論，他

前九大 河合光路・元東北大 吉田思郎著
朝倉物理学大系19
原　子　核　反　応　論
13689-0 C3342　A 5 判 400頁 本体7400円

核反応理論を基礎から学ぶために，その起源，骨組み，論理構成，導出の説明に重点を置き，応用よりも確立した主要部分を解説。〔内容〕序論／核反応の記述／光学模型／多重散乱理論／直接過程／複合核過程－共鳴理論・統計理論／非平衡過程

大系編集委員会編
朝倉物理学大系20
現代物理学の歴史 I
―素粒子・原子核・宇宙―
13690-6 C3342　A 5 判 464頁 本体8800円

湯川秀樹・朝永振一郎・江崎玲於奈・小柴昌俊といったノーベル賞研究者を輩出した日本の物理学の底力と努力，現代物理学への貢献度を，各分野の第一人者が丁寧かつ臨場感をもって俯瞰した大著。本巻は素粒子・原子核・宇宙関連33編を収載

大系編集委員会編
朝倉物理学大系21
現代物理学の歴史 II
―物性・生物・数理物理―
13691-3 C3342　A 5 判 552頁 本体9500円

湯川秀樹・朝永振一郎・江崎玲於奈・小柴昌俊といったノーベル賞研究者を輩出した日本の物理学の底力と努力，現代物理学への貢献度を，各分野の第一人者が丁寧かつ臨場感をもって俯瞰した大著。本巻は物性・生物・数理物理関連40編を収載

◆ 物理学30講シリーズ〈全10巻〉 ◆

著者自らの言葉と表現で語りかける大好評シリーズ

戸田盛和著
物理学30講シリーズ1
一般力学30講
13631-9 C3342 A5判 208頁 本体3800円

力学の最も基本的なところから問いかける。〔内容〕力の釣り合い／力学的エネルギー／単振動／ぶらんこの力学／単振り子／衝突／惑星の運動／ラグランジュの運動方程式／最小作用の原理／正準変換／断熱定理／ハミルトン-ヤコビの方程式

戸田盛和著
物理学30講シリーズ2
流体力学30講
13632-6 C3342 A5判 216頁 本体3800円

多くの親しみやすい話題と有名なパラドックスに富む流体力学を縮まない完全流体から粘性流体に至るまで解説。〔内容〕球形渦／渦糸／渦列／粘性流体の運動方程式／ポアズイユの流れ／ストークスの抵抗／ずりの流れ／境界層／他

戸田盛和著
物理学30講シリーズ4
熱現象30講
13634-0 C3342 A5判 240頁 本体3700円

熱の伝導，放射，凝縮等熱をとりまく熱現象を熱力学からていねいに展開していく。〔内容〕熱力学の第1，2法則／エントロピー／熱平衡の条件／ミクロ状態とエントロピー／希薄溶液／ゆらぎの一般式／分子の分布関数／液体の臨界点／他

戸田盛和著
物理学30講シリーズ5
分子運動30講
13635-7 C3342 A5判 224頁 本体3600円

〔内容〕気体の分子運動／初等的理論への反省／気体の粘性／拡散と熱伝導／熱電効果／光の散乱／流体力学の方程式／重い原子の運動／ブラウン運動／拡散方程式／拡散率と易動度／ガウス過程／揺動散逸定理／ウィナー・ヒンチンの定理／他

戸田盛和著
物理学30講シリーズ6
電磁気学30講
13636-4 C3342 A5判 216頁 本体3800円

〔内容〕電荷と静電場／電場と電荷／電荷に働く力／磁場とローレンツ力／磁場の中の運動／電気力線の応力／電磁場のエネルギー／物質中の電磁場／分極の具体例／光と電磁波／反射と透過／電磁波の散乱／種々のゲージ／ラグランジュ形式／他

戸田盛和著
物理学30講シリーズ7
相対性理論30講
13637-1 C3342 A5判 244頁 本体3800円

〔内容〕光の速さ／時間／ローレンツ変換／運動量の保存と質量／特殊相対論的力学／保存法則／電磁場の変換／テンソル／一般相対性理論の出発点／アインシュタインのテンソル／シュワルツシルトの時空／光線の湾曲／相対性理論の検証／他

戸田盛和著
物理学30講シリーズ8
量子力学30講
13638-8 C3342 A5判 208頁 本体3800円

〔内容〕量子／粒子と波動／シュレーディンガー方程式／古典的な極限／不確定性原理／トンネル効果／非線形振動／水素原子／角運動量／電磁場と局所ゲージ変換／散乱問題／ヴリアル定理／量子条件とポアソン括弧／経路積分／調和振動子他

戸田盛和著
物理学30講シリーズ9
物性物理30講
13639-5 C3342 A5判 240頁 本体3800円

〔内容〕水素分子／元素の周期律／分子性物質／ウィグナー分布関数／理想気体／自由電子気体／自由電子の磁性とホール効果／フォトン／スピン波／フェルミ振子とボース振子／低温の電気抵抗／近藤効果／超伝導／超伝導トンネル効果／他

戸田盛和著
物理学30講シリーズ10
宇宙と素粒子30講
13640-1 C3342 A5判 212頁 本体3800円

〔内容〕宇宙と時間／曲面と超曲面／閉じた空間・開いた空間／重力場の方程式／膨張宇宙モデル／球対称な星／相対性理論と量子力学／自由粒子／水素類似原子／電磁場の量子化／くり込み理論／ラム・シフト／超多時間理論／中間子の質量／他

上記価格（税別）は2007年1月現在